ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN
UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER: HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

:: Band 18 :: Seite 1 bis 94

:: Heft 1 :: Februar 1938

Dem Andenken

ERICH TREFFTZ'

zur 50. Wiederkehr seines Geburtstages

gewidmet von

R. Grammel / C. B. Biezeno / A. Busemann
G. Hamel / H. Hengst / Th. v. Kármán
K. Marguerre / R. v. Mises / L. Prandtl
W. Tollmien / Fr. A. Willers

Dazu zwei Arbeiten aus dem Nachlaß



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Deutsch-englisch-französisches Inhaltsverzeichnis der in Band XVIII, Heft 1 der „ZAMM" (1938) veröffentlichten Aufsätze und Kleinen Mitteilungen.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 18 Februar 1938 Heft 1

Das wissenschaftliche Werk von Erich Trefftz.

Von. *R. Grammel* in Stuttgart.

Am 21. Februar 1938 wäre Erich Trefftz, hätte ihn nicht eine tückische Krankheit dahingerafft, fünfzig Jahre alt geworden. Mitten aus einer Periode besonders fruchtbaren Schaffens, das seinen Niederschlag noch während eines ganzen Jahres nach seinem Tod in der Veröffentlichung mehrerer hinterlassener Arbeiten fand, ist er herausgerissen worden, und so war es ihm nicht beschieden, mehr als wohl nur eine knappe Hälfte seines Lebenswerkes zu vollenden. Diese Hälfte ist aber so bedeutend, daß es nicht bloß einen Akt pietätvollen Gedenkens darstellt, sie aus Anlaß seines fünfzigsten Geburtstags zu würdigen: sein wissenschaftliches Werk war maßgebend an der Entwicklung wichtiger Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik in den letzten zwei Jahrzehnten beteiligt, und so läßt die Durchsicht seiner schönen und bis ins letzte Wort klaren Arbeiten diese ganze Entwicklung noch einmal lebendig werden und zeigt zugleich einen höchst lehrreichen Querschnitt durch jene Gebiete.

Man kann die Arbeiten von Trefftz in folgende fünf Gruppen einteilen: I. Hydrodynamik, II. Angewandte Mathematik, III. Schwingungstheorie, IV. Elastizitätstheorie und V. Sonstiges. Die Reihenfolge dieser Gruppen entspricht, trotz mancher Überschneidungen, auch einigermaßen ihrer zeitlichen Folge und sicherlich seiner eigenen inneren Entwicklung, insofern als sein früheres Schaffen von 1913 bis etwa 1922 vorzugsweise hydrodynamische Arbeiten umfaßt, sein späteres bis zu seinem Tode hauptsächlich elastizitätstheoretische Probleme, wogegen die zweite und dritte Gruppe mehr die mittlere Periode seines Schaffens kennzeichnen.

I. Hydrodynamik. Gleich mit seiner Straßburger Dissertation [1] [1]) über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen beim Ausfluß aus einem Gefäß hat Trefftz eine wichtige und schwierige Aufgabe, die die klassische Hydrodynamik übriggelassen hatte, in Angriff genommen und auf folgende originelle und elegante Art gelöst. Die potentialtheoretische Formulierung des Problems läßt sich mit Hilfe des Greenschen Satzes auf eine Integralgleichung zurückführen, welche durch Quadraturen lösbar wäre, wenn man die Form des Strahlrandes schon kennen würde. Mithin kommt man zu einem Verfahren sukzessiver Approximation, dessen Konvergenz zwar nicht bewiesen wird, aber numerisch ganz augenscheinlich ist, indem man eine gut abgeschätzte Strahlform annimmt und aus der damit (bei einem freien Strahl) ohne weiteres bekannten Potentialverteilung φ_1 am Strahlrand auch das Potential am festen Gefäßrand (mittels der Integralgleichung) berechnet und hieraus dann rückwärts (wieder mittels der Integralgleichung) das zugehörige Potential φ_2 des Strahlrandes. Die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist ein Maß für den Fehler, der noch in der angenommenen Strahlform liegt. Je nach dem Vorzeichen dieser Differenz muß man, wie eine einfache qualitative Betrachtung zeigt, den angenommenen Strahlrand nach der einen oder anderen Seite verschieben und erhält so nach vier Schritten ein Ergebnis für das Verhältnis $F_\infty : F_0$ (asymptotischer Strahlquerschnitt zu Öffnungsquerschnitt), also für die sogenannte Kontraktionszahl, welches mit einem theoretischen Fehler von wahrscheinlich nicht mehr als 3,5% behaftet ist und mit den Bazinschen Versuchen gut übereinstimmt. Die Konstruktion des Strömungsbildes mit Hilfe der infinitesimalgeometrischen Eigenschaften des Netzes der Potential- und Stromlinien bei rotationssymmetrischen Strömungen beschließt diese (von ihm selbst später noch etwas umgeformte) Erstlingsarbeit, mit der sich Trefftz sofort als angewandter Mathematiker von bester Prägung ausgewiesen hat.

Ein kleiner Beitrag [2] (von nur einer Druckseite) zu der damals neu aufblühenden Aerodynamik machte seinen Namen rasch bekannt: offenbar angeregt durch Blumenthals

[1]) Die eckig eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß.

Untersuchung über die Druckverteilung an Joukowskiprofilen[2]) (deren numerische Auswertung Trefftz und Toepfer durchführten) fand er die inzwischen in alle Lehrbücher übergegangene einfache Konstruktion der Joukowskiprofile mittels zweier Hilfskreise, aus denen sich auch sehr leicht die Geschwindigkeit am Profilrand ergibt.

Da Joukowskiprofile hinsichtlich ihrer Verwendung als Tragflächenprofile den Nachteil haben, daß sie an der Hinterkante in eine Schneide auslaufen, so lag die Aufgabe nahe, konforme Abbildungen des Kreises zu suchen, welche Profile mit vorgeschriebenem, von Null verschiedenem Winkel δ der Hinterkante erzeugen. In einer gemeinsamen Arbeit [6] lösen v. Kármán und Trefftz diese Aufgabe in der Weise, daß ein schon von Kutta[3]) skizzierter Gedankengang ausgeführt wird: man bildet das Äußere eines Vollkreises K auf das Äußere eines Kreiszweiecks konform ab, dessen Eckenwinkel gleich δ ist, und sieht dieses Kreiszweieck (anstatt des von Joukowski verwendeten Kreisbogens) als Skelett eines Profils an, das dann schließlich durch dieselbe konforme Abbildung aus einem Kreis K_1 entsteht, der den Kreis K in dem der Hinterkante entsprechenden Punkte berührt. Die zweifache Mannigfaltigkeit der Joukowskiprofile wird so zu einer dreifachen erweitert, wobei immer noch der grundlegende theoretische Vorteil der Joukowskiprofile erhalten bleibt, daß sich Auftrieb und Moment (Druckpunktlage) durch ganz einfache Formeln darstellen lassen. Die tatsächlich verwendeten Flügelprofile weichen nun allerdings von den mit dieser Methode erreichbaren häufig noch ein wenig ab. Man kann aber auch diesen kleinen Unterschied vollends berücksichtigen, indem man einem gegebenen Profil zunächst ein Kreiszweieck von gleichem Kantenwinkel δ in geeigneter Weise zuordnet. Die konforme Abbildung, die dieses Kreiszweieck rückwärts wieder in den Kreis überführt, transformiert das gegebene Profil in eine fast kreisförmige Kurve, und deren Außengebiet läßt sich dann wenigstens genähert auf das Äußere eines wirklichen Kreises konform abbilden, womit die Aufgabe auch für beliebige Profile grundsätzlich gelöst ist. Die genauere funktionentheoretische Begründung für den letzten Schritt, die Trefftz zu geben beabsichtigte, ist leider bis jetzt unterblieben. (Die an sich naheliegende Fortsetzung des Kármán-Trefftzschen Gedankens zur Konstruktion von Profilen, die auch noch einen zweiten Nachteil der Joukowskiprofile, nämlich die starke Druckpunktwanderung bei veränderlichem Anstellwinkel, beseitigen, ist merkwürdigerweise erst nach 18 Jahren erfolgt[4]).

Mit der Prandtlschen Tragflächen- und Propellertheorie hat sich Trefftz in vier Aufsätzen beschäftigt. Im ersten [9] gelingt es ihm, das Problem mathematisch in mancher Hinsicht dadurch zu vereinfachen, daß er die Berechnung des Auftriebs und des induzierten Widerstandes auf eine Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie zurückführt. Dies geschieht im wesentlichen dadurch, daß man die Zirkulation Γ und die induzierte Geschwindigkeit w ausdrückt durch die Potentialfunktion, die die ebene Potentialströmung des Wirbelbandes im Unendlichen hinter der Tragfläche beschreibt, und zwar ergibt sich Γ als Sprung dieses Potentials beim Durchsetzen des Wirbelbandes von unten nach oben, und w als halbe negative Ableitung des Potentials an der Sprungstelle in der Normalenrichtung. Damit liefert dann die Prandtlsche Gleichung (zwischen Γ und w) sofort eine gemischte Randwertaufgabe aus der Theorie des logarithmischen Potentials. Diese Potentialaufgabe kann beispielsweise für eine Tragfläche, die sich nur einseitig ins Unendliche erstreckt, verhältnismäßig bequem auch numerisch gelöst werden, und sie führt für beiderseits endlich lange Tragflächen sehr schnell auf die Munksche Minimalbedingung für Tragflächen kleinsten induzierten Widerstandes und damit bei ebenen Wirbelbändern auf die elliptische Auftriebsverteilung. (Die potentialtheoretische Idee dieses Aufsatzes ist ebenfalls erst nach 15 Jahren weiter ausgeschöpft worden[5]).

In zwei folgenden Aufsätzen [10] [14], die über den Stand des Problems vom Jahre 1921 zusammenfassend berichten (und im wesentlichen übereinstimmen), wird die vorhin genannte Potentialaufgabe auch für die rechteckige Tragfläche mit unveränderlichem Anstellwinkel und unveränderlichem Profil gelöst und die zugehörige potentialtheoretische Herleitung der Betzschen Minimalbedingung für Propeller mit geringstem Energieverlust gegeben. Außerdem findet sich dort eine bemerkenswerte Formel für den maximal möglichen induzierten Widerstand.

Ein letzter, hinterlassener Aufsatz [36] nimmt die potentialtheoretische Formulierung der Tragflügeltheorie noch einmal vor und gibt zunächst eine geistreiche Anweisung zur experimentellen Lösufig der gemischten Randwertaufgabe, wobei das Gebiet (die obere Halbebene) zuvor auf das Innere eines Kreises oder in mancher Hinsicht noch zweckmäßiger auf das Innere eines Halbkreises konform abgebildet wird. Eine Membran, die mit Fäden über Zäune von vorgeschriebener Höhe in vorgeschriebener Entfernung von den Grenzen des

[2]) O. Blumenthal: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 4 (1913), S. 125.
[3]) W. Kutta: Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., math.-phys. Kl. 1911, S. 65.
[4]) A. Betz und F. Keune: Luftfahrtforsch. 13 (1936), S. 336.
[5]) H. Schmidt: ZAMM 17 (1937), S. 101.

Bereiches (Kreis bzw. Halbkreis) gespannt wird, löst die Aufgabe sehr anschaulich. In einem zweiten Teil wird für die Zirkulation eine Integralgleichung abgeleitet, die aber die sonst auftretende Singularität des Kernes umgeht. Nachdem die Ebene auf das Äußere des Einheitskreises so abgebildet ist, daß der Wirbelbandschnitt in dessen Peripherie übergeht, führt die bekannte Randwertdarstellung des logarithmischen Potentials rasch auf die gesuchte inhomogene Integralgleichung mit leicht symmetrisierbarem, negativ definitem Kern. Der Zweck dieser Integralgleichung besteht nun darin, eine wirklich brauchbare Fehlerabschätzung für eine irgendwie (z. B. experimentell) gefundene Näherungslösung der Zirkulationsverteilung zu liefern. Dies gelingt in der Tat auf Grund eines für Integralgleichungen mit negativ definitem Kern gültigen Hilfssatzes, und die obere Schranke des Fehlers läßt sich so in lauter bekannten Funktionen ausdrücken.

Ein weiteres schönes Beispiel einer Anwendung der Potentialtheorie bietet die zusammen mit L. Hopf durchgeführte Berechnung [11] der ebenen Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände über einer gleichmäßig geneigten undurchlässigen Schicht mit einem quergestellten Abfanggraben, welcher die Grundwasserschicht nur anschneidet, ohne bis zur undurchlässigen Schicht zu dringen. Die Methode der konformen Abbildung liefert den ganzen Strömungsverlauf und zeigt an einem praktischen Fall, wie sich der Grundwasserspiegel hierbei absenkt.

II. Angewandte Mathematik. Trefftz' mathematische Untersuchungen sind alle entweder von praktischen Problemen angeregt oder auf technische Anwendungen ausgerichtet. Ein schönes Problem der Mathematik ohne solche Ausrichtung konnte ihn wohl erfreuen, aber nie zur Bearbeitung reizen; und auch in der Mathematik ließ er, ebenso wie in allen seinen anderen Abhandlungen, nur explizit ausführbare Lösungen gelten. Man fühlt überall, wie ihm stets die zahlenmäßige Auswertbarkeit vorschwebt, und darum wirken auch seine rein mathematischen Gedankengänge nirgends abstrakt.

Eine erste frühe Arbeit [4] zeigt, wie man den Anwendungsbereich des praktisch viel benützten Picardschen Verfahrens der sukzessiven Approximation bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen (oder auch bei Systemen von solchen) unter Umständen erheblich erweitern kann, indem man als unabhängige Veränderliche die Bogenlänge der Integralkurve einführt. Zwar muß dann zur Sicherung der Konvergenz des Verfahrens die zugehörige Lipschitzbedingung verschärft werden, aber man braucht sie nur noch für die unmittelbare Umgebung der Integralkurve zu stellen und nicht mehr für ein von vornherein vorgeschriebenes endliches Gebiet um den Anfangspunkt. Wer das Picardsche Verfahren wirklich schon angewandt hat, weiß, wie lästig diese letztgenannte Konvergenzbedingung sein kann: die Trefftzsche Bedingung paßt sich dem Sinn der Differentialgleichung viel besser an und mag wohl weiter führen. Es wäre erwünscht, dies an Beispielen zu zeigen. (Eine Anwendung gab Trefftz selbst später; vgl. [5] unter **IV.**)

Die nach meiner Ansicht geistreichste mathematische Arbeit [7] von Trefftz betrifft ein Problem, das sowohl in der Hydrodynamik wie in der Elastizitätstheorie eine Rolle spielt, nämlich die Potentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ oder die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta\varphi = 0$ für „fast" kreisförmige Gebiete mit vorgeschriebenen Randwerten aufzulösen. Er gibt zwei Lösungsverfahren, von denen das eine, obwohl nicht notwendig konvergent, für fast kreisförmige Gebiete praktisch stets hervorragend gut brauchbar ist, wogegen das zweite zwar praktisch etwas umständlicher, aber sicher konvergent und nicht nur auf fast kreisförmige, sondern auf sehr allgemein gestaltete Gebiete anwendbar ist. Der Leitgedanke besteht beim ersten Verfahren darin, daß man dem fast kreisförmigen Gebiet mit dem Rand $R(s)$ einen umschließenden Kreis $K(t)$ (der ohne Einschränkung der Einheitskreis sein darf) zufügt, welchem die Randwerte $g(s)$ des Potentials φ auf $R(s)$ durch Verschieben längs der Radien zugeordnet werden. Ist $2\pi N(x, y; t)$ am Kreispunkt t die Normalableitung der bekannten Greenschen Funktion für den Kreis $K(t)$, so ist nach einer Fundamentalformel der Potentialtheorie im Falle $\Delta\varphi = 0$ die erste Näherung $g_1(x, y)$ des Potentials im Innenpunkt x, y gegeben durch das Kreisintegral $g_1(x, y) = \int N(x, y; t)\, g(t)\, dt$, und somit ist der Fehler der ersten Näherung auf dem Rand $R(s)$ einfach $f_1(s) = g(s) - \int N(s; t)\, g(t)\, dt$. Für die nötige Korrektion hätte man also lediglich die gleiche Randwertaufgabe mit den Randwerten $f_1(s)$ auf $R(s)$ zu lösen; statt dessen schiebt man diese Randwerte wieder auf den Kreis $K(t)$ und nimmt somit als erste Korrektion $k_1(x, y) = \int N(x, y; t)\, f_1(t)\, dt$. In gleicher Weise erhält man den zweiten Fehler $f_2(s) = f_1(s) - \int N(s; t)\, f_1(t)\, dt$ und daraus die zweite Korrektion $k_2(x, y) = \int N(x, y; t)\, f_2(t)\, dt$ und so sukzessiv weiter, bis der Fehler unter seinen zulässigen Wert gesunken sein mag. Dieses erste, nicht immer konvergente Verfahren kann zu einem konvergenten zweiten Verfahren umgewandelt werden, indem man von dem unsymmetrischen Kern $N(s, t)$ zu einem symmetrischen $K(s, t)$ übergeht. Dies gelingt mit einer „Zwischenfunktion" $h(t) = \int N(t_1; t)\, g(t_1)\, dt_1$ (wo das Integral über die Randkurve $R(t_1)$ erstreckt ist), die nun an Stelle von $g(t)$ als Rand-

wert auf $K(t)$ genommen wird. Damit kommt die erste Näherung $g_1(x, y) = \int N(x, y; t)\, h(t)\, dt$ und ihr Fehler $f_1(s) = g(s) - \int N(s; t)\, h(t)\, dt$. Die erste Korrektion wird ebenfalls nicht aus $f_1(s)$ gebildet, sondern aus der Zwischenfunktion $h_1(t) = \int N(t_1; t)\, f_1(t_1)\, dt_1$ nach der Vorschrift $k_1(x, y) = \int N(x, y; t)\, h_1(t)\, dt = \int K(x, y; t)\, f_1(t)\, dt$ mit dem (symmetrischen) Kern $K(x, y; t) = \int N(x, y; r)\, N(t; r)\, dr$ und entsprechend weiter. Die n-te Korrektion wird so $k_n(x, y) = \int K(x, y; t)\, f_n(t)\, dt$ und läßt sich besonders einfach für solche Gebiete explizit auswerten, die vom Kreismittelpunkt aus gesehen konvex sind: man erhält hier in Polarkoordinaten

$$k_n(\varrho, \vartheta) = \Sigma\,(a_\nu\, \varrho^\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu\, \varrho^\nu \sin \nu\vartheta) \quad \text{mit} \quad \left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int \bar{\varrho}^{-\nu}(t)\, f_n(t) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \nu t\, dt,$$

wo $\bar{\varrho}$ den Fahrstrahl des Punktes $\vartheta = t$ auf der Randkurve R bedeutet. Soviel mir bekannt, ist dieses Trefftzsche Verfahren (das auch auf drei Dimensionen, ferner auf alle Gebiete mit bekannter Greenscher Funktion, auf andere Differentialgleichungen vom elliptischen Typ und endlich auf Bipotentialprobleme übertragen werden kann) praktisch noch bei weitem nicht in seinem vollen Umfang ausgeschöpft und für die Anwendungen nutzbar gemacht worden.

Ein weiteres Problem, mit dem sich Trefftz viel beschäftigt und tief auseinandergesetzt hat, ist das folgende. Wenn man Randwert- oder Eigenwertaufgaben mit den direkten Methoden der Variationsrechnung behandelt, etwa mit dem Ritzschen oder Galerkinschen Verfahren (oder mit dem noch allgemeineren Rayleighschen), so stößt man von selbst auf die Schwierigkeit, die darin besteht, daß diese Verfahren immer nur eine obere Schranke für den Minimalwert des zugehörigen Variationsproblems liefern (beispielsweise für die potentielle Energie bei Randwertproblemen der Elastizitätstheorie oder für die Eigenfrequenzen bei schwingungsfähigen Systemen). In einer ersten Arbeit [21] (vgl. auch [25]) behebt Trefftz diese Schwierigkeit wenigstens für die Randwertprobleme dadurch, daß er das Minimalproblem in ein Maximalproblem transformiert[6]), was in der Weise geschieht, daß man bei einer etwas abgeänderten Minimalforderung anstatt der Ritzschen Näherungsfunktionen, die die Randbedingungen, aber nicht die Differentialgleichungen befriedigen, solche Näherungsfunktionen wählt, die den Differentialgleichungen, aber nicht den Randbedingungen genügen [21], oder (was auf dasselbe hinauskommt) das Minimalproblem mit geeigneten gemilderten Randbedingungen löst [25]. Dieses Trefftzsche Verfahren ist eine Verallgemeinerung der klassischen Reihenentwicklungen nach Partikularlösungen, und seine Konvergenz ist viel einfacher nachzuweisen als beim Ritzschen und Galerkinschen Verfahren. Daß das Trefftzsche Verfahren untere Schranken liefert, folgt aus einem bekannten Theorem der Variationsrechnung, wonach der Minimalwert eines Variationsproblems sinkt, wenn man die Randbedingungen mildert. In manchen Fällen (z. B. wenn sich das fragliche Variabelngebiet aus einfach zu behandelnden Gebieten zusammensetzt) ist es, wie Trefftz gezeigt hat, sogar zweckmäßig, das Variationsproblem noch weiter zu mildern, indem man im Innern des Gebietes auf die geforderte Stetigkeit oder Differentiierbarkeit teilweise verzichtet. An Beispielen über die Berechnung von Torsionssteifigkeiten ergibt sich, daß man hinreichend enge Schranken für den genauen Wert erhält, wenn man das Trefftzsche Verfahren mit dem Ritzschen oder Galerkinschen verbindet[7]).

Auf Eigenwertprobleme läßt sich das Trefftzsche Verfahren (im Gegensatz zum Ritzschen und Galerkinschen) i. a. nicht übertragen, da die Partikularlösungen hier die unbekannten Eigenwerte selbst enthalten. (Eine Ausnahme bildet das Eigenwertproblem $\Delta\Delta u + \lambda \Delta u = 0$, welchen Fall Trefftz selbst später mit seinem Verfahren erledigt hat; vgl. [32] unter **IV**.) Nun ist aber gerade bei Eigenwertproblemen die Sachlage insofern günstiger, als man zu den oberen Schranken, die etwa das Ritzsche, Galerkinsche oder Rayleighsche Verfahren liefern, ohne weiteres auch untere Schranken finden kann, indem man die zugehörige Integralgleichung heranzieht und die Beziehung $\iint K^2(s, t)\, ds\, dt = \Sigma\, 1/\lambda_\nu^2$ benützt. Wie man hieraus eine untere Schranke für den tiefsten Eigenwert λ_1 finden kann, ist längst bekannt: $1/\lambda_1^2 \leqq \iint K^2(s, t)\, ds\, dt$. Trefftz verallgemeinert in einer kurzen, aber inhaltsreichen Arbeit [28] diese Abschätzungsformel und erhält als untere Schranke für den i-ten Eigenwert: $1/\lambda_i^2 \leqq \iint K^2(s, t)\, ds\, dt - \Sigma\, 1/L_\nu^2 + 1/L_i^2$, wo die L_ν^2 obere Schranken für die λ_ν^2 sind und die Summe mindestens bis zum i-ten Gliede gehen muß. — Die Rechnung kann allerdings nur dann wirklich durchgeführt werden, wenn man den Kern $K(s, t)$ angeben kann (— für symmetrische, positiv definite und stetige Kerne liefert der Mercersche Satz, was weniger bekannt zu sein scheint, zufolge $\int K(s, s)\, ds = \Sigma\, 1/\lambda_\nu$ zwar nicht so scharfe, aber dafür einfacher berechenbare untere Schranken —). Kennt man den Kern jedoch nicht, so kann man untere Schranken häufig dadurch gewinnen, daß man nach einer Idee von Courant das Gebiet des

[6]) Vgl. auch K. Friedrichs: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929, S. 13.

[7]) Einen mit diesem Verfahren eng verwandten Gedanken hat neuerdings H. Hengst [ZAMM 18 (1938), S. 44] in seiner noch auf Trefftz' Anregung zurückgehenden Dissertation benutzt.

Schwingers vergrößert, beispielsweise bei einer elliptischen Membran das umbeschriebene Rechteck betrachtet. Hat man hier untere Schranken l_1 und l_2 für die beiden tiefsten Eigenwerte gefunden, und kennt man außerdem für den tiefsten Eigenwert eine obere Schranke $L_1 < l_2$, so kann man die Abschätzung $l_1 \leq \lambda_1 \leq L_1$ noch wesentlich verschärfen, wie Trefftz in der gleichen Arbeit [28] zeigt, woraus dann fast von selbst auch eine Abschätzung des Fehlers der auf irgendeine Weise gewonnenen Näherung für die erste Eigenfunktion folgt.

Während es beim Ritzschen Verfahren verhältnismäßig einfach ist, zu zeigen, daß ein Ritzscher Ansatz [im eindimensionalen Fall also $y_n = \sum_1^n c_\nu \varphi_\nu(x)$] eine obere Schranke liefert, die mit wachsendem n gegen den Minimalwert des zugehörigen Variationsproblems konvergiert, so steht doch keineswegs fest, daß damit auch die Funktionen y_n gegen die Minimalfunktion y konvergieren müssen. Mit dieser Frage beschäftigt sich Trefftz in einer Arbeit [25], in welcher sich außerdem noch einmal eine Darlegung seines eigenen Gegenstücks zum Ritzschen Verfahren (siehe [21]) findet. Der Konvergenzbeweis (der dann später in noch anschaulicherer Form auch in das Referat [24] aufgenommen worden ist) beruht darauf, daß man versucht, die Funktionswerte y_n durch die Minimalwerte von sogenannten Nebenproblemen auszudrücken. Damit ist die Frage nach der Konvergenz der Funktionen y_n auf die einfachere Frage nach der Konvergenz der Minimalwerte eines Nebenproblems zurückgeführt, und es ergibt sich so, daß die Funktionen y_n sicherlich dann gegen die Minimalfunktion y konvergieren, wenn die zugehörige Greensche Funktion in ihrem singulären Punkt endlich bleibt (und im übrigen stetig ist).

III. Schwingungstheorie. In die früheste Zeit von Trefftz wissenschaftlichem Schaffen führt ein Vortrag zurück, den Th. v. Kármán im Jahre 1914 vor der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt über die Längsstabilität und die Längsschwingungen von Flugzeugen hielt. Zu diesem Thema leistete damals sein Schüler Trefftz einen sehr nützlichen Beitrag [3], indem er eine übersichtliche Diskussion der maßgebenden Frequenzgleichung entwickelte. Sie lautet: $p\,f(z) + q\,g(z) + h(z) = 0$, wo p und q zwei Parameter sind, die das Dämpfungsmoment und das Stabilisierungsmoment des Flugzeugs kennzeichnen, und z die komplexe Veränderliche, deren Realteil über die dynamische Stabilität entscheidet. Trefftz deutet die Gleichung in einem Koordinatensystem (p, q) als Hüllkurve und gewinnt so einen einfachen Überblick über ihre Wurzeln. Auch eine geschickte Näherungsmethode zur zahlenmäßigen Auflösung dieser Gleichung (vierten Grades) ist hinzugefügt.

Unmittelbar von der Praxis angeregt ist eine mit elementaren Mitteln durchgeführte Näherungsrechnung [12] über die Schwingungen des sogenannten Schachtlotes, also eines Fadenpendels mit Berücksichtigung des Faden(Draht-)gewichts. Ausgehend von der Lösung des fadengewichtslosen Punktpendels findet man leicht die Näherung erster Ordnung für die Grundschwingung des wirklichen Schachtlotes und kann auch sofort angeben, welcher Anteil der Energie auf diese Grundschwingung, und welcher auf die Oberschwingungen im ganzen entfällt.

In drei tiefgehenden kurzen Noten (die man auch unter II. einreihen könnte) klärt Trefftz einige grundsätzliche Fragen der Schwingungstheorie. In der ersten [16] zeigt er, daß man, wenn man Schwingungsprobleme mit der Methode der Integralgleichungen behandelt, an Stelle der üblichen Voraussetzung der zwei- (bzw. vier-) maligen Differentiierbarkeit der zu entwickelnden Funktionen die viel natürlichere Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit des ersten (bzw. zweiten) Differentialquotienten treten lassen kann. Diese zweite Art der Voraussetzung besagt nämlich einfach, daß die potentielle Energie der Anfangslage endlich sein muß.

Die zweite Note [20] gibt eine mathematische Erklärung für die Erfahrungstatsache, daß auch bei schwingenden Systemen mit nichtlinearen Dämpfungs- und Rückstellkräften periodische Erregungen periodische Bewegungszustände erzeugen, und tut dar, daß die Reibung hierbei einen wesentlichen Anteil hat.

Die dritte [19] dieser Noten ist die praktisch wichtigste und zeigt, wie man auch bei nichtlinearen Schwingungsvorgängen ein zahlenmäßig berechenbares Kriterium für die Stabilität oder Instabilität (Resonanz) gewinnen kann. Man muß sich lediglich, etwa näherungsweise, zwei Partikularlösungen der zugehörigen (linearen) Störungsgleichung im Periodenintervall verschaffen und vier aus ihnen gebildete bestimmte Integrale auswerten und kann dann die Instabilitätsbedingung unmittelbar anschreiben.

Seitdem sehr raschlaufende Brennkraftmaschinen gebaut werden, ist die Dynamik ihrer Torsionsschwingungen ein vielbehandeltes Problem geworden. Soweit es statthaft sein mag, eine solche Maschine dynamisch abzubilden auf eine mit konstanten Drehmassen besetzte glatte Welle, kann das Problem als gelöst angesehen werden. Von den mannigfachen Ver-

feinerungen, die an dieser „klassischen" Formulierung der Aufgabe angebracht werden müssen, hat Trefftz (teilweise im Anschluß an die zuletzt genannte Note [19] und wohl ohne Kenntnis zweier früherer englischer Aufsätze[8]) in einer eigenen Arbeit [26] und in zwei unter seiner Leitung entstandenen Dissertationen[9]) die Frage nach dem Einfluß der Veränderlichkeit der auf die Kurbelzapfen reduzierten Getriebemassen erörtert. Mathematisch handelt es sich um ein System von Differentialgleichungen mit periodisch veränderlichen Koeffizienten, also um ein auch bei den sogenannten Schüttelschwingungen[10]) auftretendes Problem, und es ergibt sich dabei eine Aufspaltung (und unter Umständen eine Verschiebung) der „klassischen" kritischen Drehzahlen. Bei Einzylindermaschinen kann die Berechnung der Resonanzbereiche auf die Auflösung von zwei unendlichen Normaldeterminanten zurückgeführt werden[11]), bei Mehrzylindermaschinen kann man sie in erster Näherung wenigstens durch eine Theorie zweiter Ordnung erhalten, die inzwischen ebenfalls vollständig entwickelt worden ist[12]).

IV. Elastizitätstheorie. Der weitaus umfangreichste Teil von Trefftz' wissenschaftlichem Schaffen gehört der Elastizitätstheorie an. Dieser Teil beginnt mit einer Sonderaufgabe aus der Knicktheorie des geraden Stabes [5], insbesondere im Hinblick auf die Festigkeit von Flugzeugholmen. Anknüpfend an seine Untersuchung [4] über die Konvergenz des Picardschen Verfahrens (vgl. unter **II.**) benützt er die Bogenlänge als unabhängige Veränderliche und kann so durch ein bis zum zweiten Schritt durchgerechnetes Verfahren der sukzessiven Approximation das Verhalten des Stabes nach Überschreitung der Knicklast in ähnlicher Weise klären, wie dies ja auch bei strenger Integration der technischen Biegegleichung $EI/\varrho = M$ (im einfachsten Fall mit elliptischen Integralen) geschieht. (Daß diese Lösung nur eine Scheinlösung ist, konnte man damals noch nicht wissen; der richtigen Erkenntnis hat besonders Trefftz selbst später — vgl. [27] und [29] — wesentlich vorgearbeitet, und es ist tragisch, daß er die inzwischen gefundene wirkliche Lösung[13]) nicht mehr erleben durfte.)

In voller Allgemeinheit, aber mit bewußter Beschränkung auf kleine Auslenkungen y, nimmt Trefftz das Knickproblem des geraden Stabes bald noch einmal auf [17]: der Stab kann jetzt beliebig belastet und nahezu beliebig gelagert sein, insbesondere mag er eine stetige Längsbelastung tragen. Diese Aufgabe läßt sich als Integralgleichung für y' mit unsymmetrischem Kern ansetzen. Um nachzuweisen, daß alle Eigenwerte, also alle Knicklasten, reell sind, wird zunächst gezeigt, daß die gemischte Ableitung $\partial^2 K(s,t)/\partial s\, \partial t$ der Einflußfunktion $K(s,t)$ jedes Balkens stets vom positiven Typus ist und eine Integraldarstellung von der Form $\int H(r,s)\, H(r,t)\, dr$ zuläßt. Daraus folgt dann vollends rasch, daß die Eigenwerte λ_ν zu einer Integralgleichung mit symmetrischem Kern für die Biegemomente gehören, womit die Realität der λ_ν bewiesen ist. Die Lösung der Integralgleichung für y' kann im Falle von Querbelastung (inhomogene Integralgleichung) nach einem Verfahren sukzessiver Approximation erfolgen, welches genau dem Lösungsverfahren durch die Neumannsche Reihe entspricht, im Falle reiner Knickbeanspruchung (homogene Integralgleichung) nach dem Vianelloschen Verfahren. In beiden Fällen ist die Realität der Eigenwerte wesentlich für die Konvergenz. (Diese Untersuchung ist neuerdings weitergeführt worden[14]).)

Ein zweites elastomechanisches Problem, mit dem sich Trefftz sehr eindringlich beschäftigt hat, betrifft die Torsion von Stäben mit polygonalem Querschnitt. De Saint-Venant hat gezeigt, daß man die Torsionsaufgabe für prismatische Stäbe auf die Randwertaufgabe zurückführen kann, eine analytische Funktion $w = \varphi + i\psi$ von $z = x + iy$ zu bestimmen, deren Imaginärteil ψ auf dem Rand des Querschnitts die Werte $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ annimmt. Setzt man $dw/dz = p + iq$, so sind die Torsionsspannungen $\tau_{xz} = G\,\omega\,(p - y)$ und $\tau_{yz} = G\,\omega\,(x - q)$, wo G der Schubmodul und ω die Torsion der Längeneinheit des Stabes ist. Trefftz formuliert diese Aufgabe für polygonale Querschnitte besonders einfach und elegant [8] (vgl. auch das Referat [23]), indem er die zweite Ableitung von w einführt: $d^2 w / dz^2 = s + it$. In diesen Größen lautet die Randbedingung $\bar{s} \sin 2\chi_\nu + \bar{t} \cos 2\chi_\nu = 1$, wo $\bar{s}$ und $\bar{t}$ die Randwerte sind und χ_ν der Winkel der ν-ten Polygonseite mit der x-Achse ist, und das bedeutet in einem (s,t)-System Geradenstücke vom Nullpunktabstand 1, welche mit der s-Achse den Winkel $-2\chi_\nu$ bilden. Sind α_ν die Eckenwinkel des gegebenen Polygons, so besitzt das (s,t)-Polygon, das übrigens dem Einheitskreis umschrieben ist, die Winkel $\beta_\nu = (2m_\nu + 1)\pi - 2\alpha_\nu$,

[8]) G. R. Goldsbrough: Proc. Roy. Soc. London 109 (1925), S. 99 u. 113, (1927), S. 259.
[9]) F. Kluge: Ing.-Arch. 2 (1931), S. 119. — T. E. Schunck: Ing.-Arch. 2 (1931), S. 591.
[10]) E. Meißner: Schweiz. Bauz. 72 (1918), S. 95.
[11]) R. Grammel: ZAMM 15 (1935), S. 47.
[12]) R. Grammel: Ing.-Arch. 6 (1935), S. 59.
[13]) K. Marguerre: ZAMM 18 (1938), S. 57.
[14]) O. Blumenthal: ZAMM 17 (1937), S. 232.

wo die m_ν ganze Zahlen sind. Die Aufgabe besteht jetzt also im wesentlichen nur noch darin, diese beiden Polygone aufeinander konform so abzubilden, daß die Ecken den Ecken entsprechen. Dies ist allgemein möglich, wenn man (was offenbar freisteht) in der (s, t)-Ebene noch geeignete Verzweigungspunkte hinzunimmt. Bei der Ausführung benützt man eine Hilfsebene $\zeta = \xi + i\eta$ und bildet sowohl die (x, y)- wie die (s, t)-Ebene mit den Schwarz-Christoffelschen Formeln auf die obere (ξ, η)-Halbebene ab, wobei die Formel für die zweite Abbildung im Zähler noch eine ganze rationale Funktion enthält, deren Nullstellen die Verzweigungspunkte liefern. Trefftz hat die ganze Rechnung auch zahlenmäßig bis zur Bestimmung der Randspannungen und der Niveaulinien der Spannungsfunktion für ein Winkeleisen, dessen Schenkel ins Unendliche reichen, durchgeführt; auf einige andere Querschnitte ist das Trefftzsche Verfahren später von C. Schmieden[15]) angewendet worden.

Wo solche Stäbe einspringende Ecken haben, treten bei der Torsion theoretisch unendlich große Spannungen auf. Man vermeidet solche unzulässigen Spannungswerte dadurch, daß man die Ecken abrundet. Mit dieser Frage beschäftigt sich Trefftz [15] im engen Anschluß an das Vorangehende, und zwar entwickelt er eine Näherungslösung, bei welcher er sich durch das hydrodynamische Analogon der Torsion leiten läßt: wie man dort die Strömung in einen wirbelbehafteten Teil mit der Geschwindigkeit Null in der Ecke und in eine Potentialströmung, die das Unendlichwerden der Geschwindigkeit an der Ecke ausdrückt, zerlegen kann, so kann man dies auch für die Spannungen tun und findet somit den Grad des Unendlichwerdens der Spannung oder auch die Abhängigkeit der Eckspannungen vom Abrundungshalbmesser ϱ der Ecke in erster Näherung, indem man die abgerundete Ecke auf die Halbebene abbildet, sich also die anderen Begrenzungen in unendliche Entfernung gerückt denkt. Das Ergebnis ist für schwache Abrundungen $\tau_{\max} \sim \varrho^{-1/3}$. Auf starke Abrundungen sind diese Überlegungen in einer von Trefftz angeregten Dissertation[16]) ausgedehnt worden.

Auf den gleichen Leitgedanken ist eine dritte Arbeit [18] aufgebaut, die nun vollends auch noch untersucht, wie die Fließgrenze aussieht, welche in einspringenden scharfen Ecken notwendigerweise auftreten muß. Anschaulich findet man die Lösung, indem man das Prandtlsche Seifenhautgleichnis entsprechend erweitert: der konstant angenommenen Fließspannung wird ein über dem Stabquerschnitt zu errichtendes Dach von konstanter Neigung zugeordnet; wo die aufgeblasene Seifenhaut sich an das Dach anlegt — und das muß in einspringenden Ecken von Anfang an der Fall sein —, ist plastisches Gebiet. Die Übersetzung dieses Gedankens in die Sprache der Potentialtheorie führt (wenn man die Spannung genau wie vorhin in einen „Wirbel"teil und in einen Potentialteil zerlegt und wieder nur den zweiten berücksichtigt) auf eine Randwertaufgabe mit unbekannter Randform (Plastizitätsgrenze), aber bekannten Randwerten, ähnlich wie bei Potentialströmungen mit freier Oberfläche. Die Lösung dieser Randwertaufgabe gelingt Trefftz sehr einfach, und damit ist die Plastizitätsgrenze gefunden. — In der gleichen Arbeit wird dann auch noch mit ähnlichen Überlegungen die kreisförmige Bohrung bei reinem Schub behandelt und die etwaige Plastizitätsgrenze ermittelt.

Gleichsam sein ganzes elastizitätstheoretisches Glaubensbekenntnis hat Trefftz niedergelegt in zwei großen, fast lehrbuchartigen Darstellungen der Gesamttheorie in der Neubearbeitung des Riemann-Weber [23] und im Handbuch der Physik [24]. Es wird nicht leicht sein, diese beiden Darstellungen an Klarheit, Übersichtlichkeit und mathematischer Tiefe wieder zu erreichen oder gar zu übertreffen, und ich glaube, daß sie sehr lange die maßgebende Form bleiben werden, unter der man sich die Elastomechanik vorstellt. Beide zeigen eine vollkommene Beherrschung sowohl des Stoffes wie des mathematischen Apparates und ergänzen sich in gewissem Sinne. Das erste Referat [23] behandelt die Grundlagen verhältnismäßig kurz und stellt hauptsächlich die wichtigsten lösbaren Einzelprobleme heraus; in der Elastokinetik zeigt es insbesondere die Verbindung einerseits mit der Integralgleichungstheorie, andererseits mit der Variationsrechnung auf. Das zweite Referat geht sehr tief in die Grundlagen der Elastizitätstheorie. Nachdem der Spannungs- und der Verzerrungstensor und ihr linearer Hookescher Zusammenhang geschildert sind, werden die Energieformeln und die Minimalprinzipe formuliert und die Eindeutigkeitsbeweise vorgeführt. Es folgen Anwendungen der Minimalprinzipe auf krummlinige Koordinaten und auf die Begründung der sogenannten technischen Festigkeitslehre, die sich hier unter gemeinsamem Gesichtspunkt aus den Minimalprinzipen mit entsprechend vereinfachten Ausdrücken für die Formänderungsarbeit ergibt. Dann werden im Anschluß an Boussinesq die wichtigsten Partikularlösungen der elastischen Grundgleichungen besprochen, einerseits hervorragend aus dem Leitgedanken,

[15]) C. Schmieden: ZAMM 10 (1930), S. 25f.
[16]) C. Dassen: ZAMM 3 (1923), S. 258.

daß sich alle Lösungen der Gleichungen $\Delta\Delta u = 0$ usw. als lineare Kombinationen von Potentialfunktionen φ und ψ [$\varphi + x\psi$, $\varphi + (x^2 + y^2)\psi$ usw.] darstellen lassen (Einzelkraft im Vollraum und im Halbraum, Gleichgewicht der Kugel), andererseits ausgehend von den Differentialgleichungen für die Spannungen (die Probleme der Spannungsfunktionen). In der Kinetik erweist sich der Fall der Einzelkraft im Vollraum als von grundlegender Bedeutung, weil sich mit seiner Hilfe die Bewegungsprobleme auf den einfacheren Fall fehlender Massenkräfte zurückführen lassen. Die allgemeine Integrationstheorie der Elastostatik knüpft an die Reziprozitätssätze von Betti und speziell von Maxwell an, sowie an die Formeln von Somigliana, womit der Anschluß an die in der Potentialtheorie geläufigen Gedankengänge gefunden ist. Mit den Existenzbeweisen für die Lösungen bei gegebenen Oberflächenverschiebungen, mit dem Ritzschen Verfahren samt dem Trefftzschen Konvergenzbeweis (vgl. oben [25]) und mit einem Ausblick auf mögliche Erweiterungen der klassischen Elastizitätstheorie (wovon sogleich noch die Rede sein wird) beschließt Trefftz dieses enzyklopädische Referat, in welchem man wohl die reifste Frucht vom Baum seiner wissenschaftlichen Erkenntnis sehen darf.

Eine solche Erweiterung der klassischen Elastizitätstheorie ist unausweichlich, sobald man an das Problem der Stabilität des elastischen Gleichgewichts herantritt. Die Erfahrung zeigt an jedem knickenden oder kippenden System, daß das elastische Gleichgewicht bei stetiger Steigerung der äußeren Belastung Verzweigungsstellen besitzt. Der (dieser Erfahrungstatsache bloß scheinbar widersprechende) Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz für die Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie besagt — da diese Grundgleichungen nur für unendlich kleine Gestaltsänderungen und also auch für unendlich kleine Spannungen abgeleitet sind —, daß im Grenzfall verschwindender Spannungen und Dehnungen noch kein Verzweigungspunkt des elastischen Gleichgewichts vorhanden sein kann. Mithin können die gewöhnlichen Grundgleichungen der „unendlich kleinen“ Verzerrungen überhaupt nichts über die wirklichen Verzweigungen und die dort etwa auftretende Labilität des elastischen Gleichgewichts aussagen; man muß vielmehr die Grundgleichungen zuvor auf endliche Verzerrungsgrößen erweitern. (Daß die übliche Berechnung solcher Verzweigungspunkte aus den Grundgleichungen der „technischen“ Festigkeitslehre dieser Feststellung nicht widerspricht, brauche ich hier nicht weiter auseinanderzusetzen.) Und zwar muß man offenbar die Erweiterung so vornehmen, daß man außer dem spannungsfreien Zustand einen (auf seine Stabilität zu untersuchenden) „Ausgangszustand“ mit endlichen Gestaltsänderungen betrachtet. Es gibt zwei Möglichkeiten, dies mathematisch zu formulieren. Man kann entweder die Grundgleichungen selbst auf den Ausgangszustand endlicher Verzerrung erweitern, d. h. Differentialgleichungen herstellen, welche diesen Zustand mit einem „unendlich benachbarten“ Zustand verknüpfen, und dann untersuchen, ob es einen solchen benachbarten Gleichgewichtszustand bei gleicher Belastung gibt. Dieser Weg ist zuerst beschritten worden[17]). Man kann aber auch eine energetische Formulierung wählen und also die potentielle Energie des Ausgangszustandes endlicher Verzerrung aufsuchen. Dann hat man nur zu untersuchen, wann diese Energie aufhört, ein wahres Minimum zu sein. Diesen Weg, der mancherlei Vorteile hat, wählt Trefftz in zwei Arbeiten [27] [29] mit gleichen Zielrichtungen. Beide Arbeiten unterscheiden sich im wesentlichen nur dadurch, daß das eine Mal [29] von vornherein angenommen wird, daß das Hookesche Spannungs-Dehnungsgesetz für den Übergang vom „Ausgangszustand“ zu seinen Nachbarzuständen gilt, während das andere Mal [27] die Frage des experimentell giltigen Spannungs-Dehnungsgesetzes bei der Formulierung des Variationsproblems noch offengelassen wird. In der ersten Arbeit [27] ist das Verfahren insbesondere an dem Beispiel des beiderseits eingespannten, geknickten Balkens gezeigt, in der zweiten [29] an der Kippung des einseitig eingespannten Balkens. In einer noch auf Trefftz' Anregung und unter seiner Anleitung entstandenen, nach seinem Tode von Marguerre veröffentlichten Untersuchung [35] sind diese Gedanken auf den seitlich geführten, in der Längsrichtung über die Knickgrenze belasteten Plattenstreifen und das hier auftretende Problem der sogenannten mittragenden Breite angewendet.

Wie sich Trefftz auch sonst gerne vom sicheren Seil der Variationsrechnung leiten läßt, so tut er dies in einer Untersuchung der Grundlagen der Schalentheorie [30]. Die übliche Herleitung der Grundgleichungen hinterläßt immer ein Gefühl der Unsicherheit, weil dabei anschauliche geometrische Betrachtungen von fragwürdiger Exaktheit nötig sind. Trefftz zeigt, wie man diese Schwierigkeit umgehen kann, wenn man die Schalengleichungen variationstheoretisch aus dem Castiglianoschen Minimalprinzip erzeugt. Man erhält sie so aus einem Variationsproblem, bei dem fünf von den sechs Gleichgewichtsbedingungen als

[17]) R. V. Southwell: Phil. Trans. Roy. Soc. 213 (1913), S. 187. — C. B. Biezeno u. H. Hencky: Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 31 (1928), S. 569; 32 (1929), S. 444.

Nebenbedingungen (mit den Verschiebungen und Drehungen als Lagrangeschen Faktoren) auftreten. Diese Herleitung hat auch noch den Vorteil, daß es nicht viel ausmacht, ob man dabei die Glieder mit h/R_i (h = Schalendicke, R_i = Krümmungshalbmesser der Mittelfläche) vernachlässigt oder beibehält.

Mit energetischen Betrachtungen bestätigt Trefftz [31] auch die bekannten Formeln für den Schubmittelpunkt eines Balkens, d. h. für denjenigen Querschnittspunkt, in welchem die Kraft angreifen muß, wenn sie nur eine Biegung, aber keine Torsion hervorbringen soll.

Gleichfalls als Variationsaufgabe behandelt er das Knickproblem der eingespannten, am Rand gleichmäßig gedrückten, quadratischen Platte [32] (ohne Kenntnis einer vorangehenden Arbeit von A. Weinstein[18]), die dasselbe Problem im wesentlichen auf gleiche Weise erledigt). Eine obere Schranke für die Knicklast ist bekannt (Ritzsches Verfahren), eine untere kann man nach einem Satz von Courant dadurch gewinnen, daß man die Einspannbedingungen mildert, etwa indem man diese in eine Fourierreihe entwickelt und nur den ersten n Gliedern dieser Entwicklung die Einspannbedingung auferlegt (Trefftz wählt die Fälle $n=1$ und $n=2$). Transformiert man die Knickgleichung $\Delta\Delta w + \lambda\,\Delta w = 0$ auf ein Variationsproblem, so ergibt sich, daß man das Integral $M = \int\int (\Delta w)^2\,dx\,dy$ zu einem Minimum machen muß mit der Nebenbedingung $J = \int\int (w_x^2 + w_y^2)\,dx\,dy = 1$. Dieses Variationsproblem läßt sich nun gerade mit dem genannten „abgebrochenen" Fourieransatz für die Randbedingungen streng lösen. Da außerdem der Wert des Minimums von $M - \lambda J$, wie leicht einzusehen, Null ist, so erhält man in $\lambda = M_{\min}$ eine untere Schranke für den gesuchten Eigenwert λ, also für die Knicklast. Zusammen mit der genannten oberen Schranke kann man so die Knicklast in ein Intervall von nur 4‰ Breite seines Mittelwerts einschließen.

Für die gleiche Platte (mit einfach gelagertem Rand) wird dann ähnlich auch noch die kritische Last der Schubknickung untersucht [34], jedoch mit dem Unterschied, daß die untere Schranke nun nicht nach dem Courantschen Satz, sondern anhand einer eigenen, früher entwickelten Abschätzungsformel (vgl. [28] unter **II.**) gefunden wird. Das Variationsproblem verlangt hier, das Minimum des Ausdrucks $\int\int[(\Delta w)^2 + \lambda\, w_x\, w_y]\,dx\,dy$ zu suchen. Ein Ritzscher Ansatz würde in üblicher Weise eine obere Schranke L_1 für den tiefsten Eigenwert λ_1 liefern. Um auch eine untere Schranke zu bekommen, hat man also nach der oben erwähnten Formel

$$1/\lambda_1^2 \leqq \int\int K^2(s,t)\,ds\,dt - \sum_2^m 1/L_\nu^2 = \sum_1^\infty 1/\lambda_\nu^2 - \sum_2^m 1/L_\nu^2$$

zu bilden. Beide Summen (und zugleich eine wesentlich verbesserte obere Schranke L_1) erhält man, wenn man einen n^2-gliedrigen (statt eines nur eingliedrigen) Ritzschen Ansatzes benützt. Dieser führt für die L_ν^2 auf eine n-reihige Determinantengleichung $|p_{ik} - \delta_{ik}(1/L^2)| = 0$ mit $\delta_{ik} = \frac{1}{0}$ für $i \frac{=}{\neq} k$, aus der man erstens $\sum_1^\infty 1/L_\nu^2 = \lim \sum_1^n p_{ii}$ als berechenbare unendliche Reihe gewinnt, zweitens aber durch direkte Auflösung bei hinreichend großem n eine hinreichend große Zahl von oberen Schranken L_ν für die Eigenwerte λ_ν. Die außerordentlich mühsame Rechnung, die Trefftz zusammen mit Willers für acht Werte L_ν ausgewertet hat, gibt schließlich eine untere und eine obere Schranke der kritischen Schubspannung. Da die Eigenwerte recht nahe beieinander liegen, so bleibt im Endergebnis immerhin noch eine Unsicherheit von rund 17%; aber es ist damit doch erstmalig überhaupt eine brauchbare Fehlerabschätzung für die kritische Last gefunden.

Wir nehmen von Trefftz elastizitätstheoretischen Arbeiten Abschied mit einer kurzen Note [37], in welcher er die bekannten Ausdrücke für die Verzerrungskomponenten sowie die Gleichgewichtsbedingungen in Zylinder- und Polarkoordinaten auf höchst einfache Weise ableitet, indem er den Vektor $\mathfrak{V} = u\,\mathfrak{t}_1 + v\,\mathfrak{t}_2 + w\,\mathfrak{t}_3$ (wo $\mathfrak{t}_i$ drei Einheitsvektoren in Richtung wachsender Koordinaten sind) nach den zugehörigen Linienelementen differentiiert und den so entstehenden Tensor symmetrisiert: so erscheinen die sechs Verzerrungsgrößen. Die Gleichgewichtsbedingungen folgen durch eine gleiche Differentiation aus drei analog zu $\mathfrak{V}$ gebildeten Spannungsvektoren.

V. Sonstiges. Endlich gibt es von Trefftz noch einige Arbeiten, die fast wie Fremdkörper in seinem Schaffen wirken würden, wenn wir nicht aus der Unterhaltung mit ihm wüßten, wie weit er den Kreis seiner Interessen abgesteckt hatte. Viele scheinbar abseits liegende Probleme der Wissenschaft hat er vorgenommen (manchmal ohne an eine Ver-

[18]) A. Weinstein: C. R. Acad. Sci. Paris (1935), S. 107.

öffentlichung seiner Lösung zu denken; die Probleme mußten nur die eine Bedingung erfüllen, mathematisch reizvoll zu sein.

Mit einer Fragestellung der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigt er sich in einer Arbeit [13], die die Schwarzschildsche Untersuchung über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes auf dasjenige zweier Massenpunkte erweitert, was offenbar der einfachste mögliche Fall der Gravitationstheorie ist, wenn man sich von der (noch in dem Schwarzschildschen Fall steckenden, der Relativitätstheorie aber fremden) Annahme befreit, daß die Euklidische Maßbestimmung in unendlicher Entfernung von einem einzigen Massenpunkt gewissermaßen die Wirkung der „weit entfernten" Fixsterne sei. Bei zwei Massenpunkten kann der Raum schon endlich sein; und alle fremdartigen Randbedingungen im „Unendlichen" fallen weg, wenn man die Feldgleichungen integriert. Trefftz führt diese Rechnung für die zweite Form $(R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} = 0)$ der Einsteinschen Gleichungen durch.

Als Hilfsaufgabe für eine Untersuchung von A. Pütter über die Wirkung chemischer Reiz- und Giftstoffe löst Trefftz [22] das Problem der eindimensionalen Diffusion im Raum zwischen zwei unendlichen parallelen ebenen Wänden, durch welche von außen ein Stoff A eindringt, der im Innern teils weiter diffundiert, teils in einen andern Stoff R chemisch verwandelt wird. Man erhält für die Konzentrationen von A und R Randwertprobleme, die nahezu identisch sind mit klassischen Wärmeleitproblemen und sich dementsprechend lösen lassen.

Einen schönen Einblick in Trefftz' Lehrtätigkeit läßt schließlich sein noch kurz vor seinem Tode erschienener Leitfaden der Graphostatik [33] tun. Dieses Büchlein zeigt die große Klarheit und Eindringlichkeit, die seine Schüler an seinem Unterricht bewunderten. Fernab von allen seinen sonstigen Arbeiten, bietet es doch an einer Stelle eine sehr feine Probe echt Trefftzschen Scharfsinns: den kurzen, schlagenden Existenzbeweis für die reziproken Kräftepläne.

Wenn wir endlich noch — außer seiner aufopfernden Tätigkeit als Schriftleiter dieser Zeitschrift (von Januar 1934 bis zu seinem Tode) — der vielen Buchbesprechungen gedenken, auf welche er namentlich in den letzten Jahren erstaunlich viel Fleiß verwendet hat, und ferner der Redaktionsarbeit für die Abschnitte über angewandte Mathematik im Mathematischen Wörterbuch, der er besonders 1935 viel Zeit widmete, so haben wir wohl sein ganzes wissenschaftliches Werk beisammen, soweit er selbst es für die Öffentlichkeit seiner Fachgenossen bestimmt hatte. Die unermeßliche Fülle der Gedanken und Pläne, die hinter dem Werk standen, kennen nur die, denen das Glück seiner persönlichen Freundschaft und seines Umgangs zuteil geworden ist.

Dreierlei kennzeichnet dieses reiche Werk: ein hoher Mut, der fast immer gerade die schwierigsten Probleme angreift und bewältigt; eine sichere Meisterschaft in der Handhabung des mathematischen Rüstzeuges, das zur Lösung der Aufgabe erforderlich ist; ein strenger Maßstab für die Selbstkritik, die bei ihm nur das gelten läßt, wogegen es keinen Einwand mehr gibt (er hat in seinen Arbeiten nie etwas Wesentliches zurücknehmen oder verbessern müssen). Dazu kommt der große Umfang dieses Werkes, — groß nicht nur im Hinblick auf die kurze Zeitspanne, die ihm dafür vergönnt war, sondern auch groß insofern, als es in beinahe alle wichtigen Gebiete der angewandten Mathematik und der technischen Mechanik tief eindringt und überall, wo es eindringt, Bahn bricht. Daß ein unerbittliches Geschick das wissenschaftliche Schaffen von Erich Trefftz in seinen besten Mannesjahren, mitten in seiner höchsten Reife, abgeschnitten hat und ihn sein Werk nur halb vollenden ließ, ist nicht bloß für ihn selbst tragisch und für seine Freunde schmerzlich: es ist für unsere Wissenschaft ein ganz großer Verlust, der erst in langer Zeit völlig ausgeglichen werden kann. 789

Verzeichnis der Schriften von E. Trefftz.

[1] Über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen. Diss. Straßburg 1913 (Leipzig 1914), auch Z. Math. Phys. 64 (1916), S. 34 bis 61.

[2] Graphische Konstruktion Joukowskischer Tragflächen. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 4 (1913), S. 130 bis 131.

[3] Über Längsstabilität und Längsschwingungen von Flugzeugen (gem. mit Th. v. Kármán), Jahrb. Wiss. Ges. Luftf. 3 (1914/15), S. 116 bis 138.

[4] Über die Konvergenz des Picardschen Verfahrens der sukzessiven Approximation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math. Ann. 76 (1915), S. 327 bis 332.

[5] Zur Frage der Holmfestigkeit, Z. Flugtechn. Motorluftsch. 9 (1918), S. 101 bis 103.

[6] Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte (gem. mit Th. v. Kármán), Z. Flugtechn. Motorluftsch. 9 (1918), S. 111 bis 116.

[7] Eine neue Methode zur Lösung der Randwertaufgabe partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. 79 (1919), S. 246 bis 264.

[8] Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt, Math. Ann. 82 (1921), S. 97 bis 112.

[9] Zur Prandtlschen Tragflächentheorie, Math. Ann. 82 (1921), S. 306 bis 319.

[10] Prandtlsche Tragflächen- und Propeller-Theorie, ZAMM 1 (1921), S. 206 bis 218.

[11] Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben (gem. m. L. Hopf), ZAMM 1 (1921), S. 290 bis 298.

[12] Über die Schwingungen des Schachtlotes, Mitt. Markscheidewes., 1921, S. 1 bis 11.

[13] Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie, Math. Ann. 86 (1922), S. 317 bis 326.

[14] Prandtlsche Tragflächen- und Propellertheorie, Vortr. aus d. Geb. d. Hydro- u. Aerodyn., Innsbruck 1922, Berlin 1924, S. 34 bis 46.

[15] Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens, ZAMM 2 (1922), S. 263 bis 267.

[16] Schwingungsprobleme und Integralgleichungen, Math. Ann. 87 (1922), S. 307 bis 314.

[17] Allgemeine Theorie der Knickung des geraden Stabes, ZAMM 3 (1923), S. 272 bis 275.

[18] Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Überschreitung der Fließgrenze, ZAMM 5 (1925), S. 64 bis 73.

[19] Zur Berechnung der Stabilität periodischer Bewegungsvorgänge, ZAMM 5 (1925), S. 473 bis 475.

[20] Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie, Math. Ann. 95 (1926), S. 307 bis 312.

[21] Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, Verh. d. 2. Intern. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1926, S. 131 bis 137.

[22] Ein Diffusionsproblem, Sitzungsb. Heidelb. Akad. Wiss. math.-phys. Kl. 1927, S 28 bis 38.

[23] Mathematische Grundlagen der Elastizitätstheorie, Probleme des elastischen Gleichgewichts, Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie, Riemann-Webers Differentialgleichungen der Physik, Bd. 2, S. 598 bis 734, Braunschweig 1927; 2. Aufl., Bd. 2, S. 240 bis 373, Braunschweig 1935.

[24] Mathematische Elastizitätstheorie, Handb. d. Physik, Bd. 6, S. 47 bis 140, Berlin 1928.

[25] Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren, Math. Ann. 100 (1928), S. 503 bis 521.

[26] Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen, Vortr. a. d. Geb. d. Aerodyn. u. verw. Geb., Aachen 1929, Berlin 1930, S. 214 bis 219.

[27] Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichtes aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen, Verh. d. 3. Intern. Kongr. f. Techn. Mech., Stockholm 1930, Bd. 3, S. 44 bis 50.

[28] Über Fehlerabschätzung bei Berechnung von Eigenwerten, Math. Ann. 108 (1933), S. 595 bis 604.

[29] Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts, ZAMM 13 (1933), S. 160 bis 165.

[30] Ableitung der Schalenbiegungsgleichungen mit dem Castiglianoschen Prinzip, ZAMM 15 (1935), S. 101 bis 108.

[31] Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, ZAMM 15 (1935), S. 220 bis 225.

[32] Die Bestimmung der Knicklast gedrückter, rechteckiger Platten, ZAMM 15 (1935), S. 339 bis 344.

[33] Graphostatik (90 S.), Leipzig und Berlin 1936.

[34] Die Bestimmung der Schubbeanspruchung beim Ausbeulen rechteckiger Platten (gem. mit Fr. A. Willers), ZAMM 16 (1936), S. 336 bis 344.

[35] Über die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiten der Beullast (gem. mit K. Marguerre), ZAMM 17 (1937), S. 85 bis 100.

[36] Berechnung der Zirkulation für die gerade, tragende Linie, ZAMM 18 (1938), S. 12 bis 20.

[37] Ableitung der Verzerrungskomponenten und der Gleichgewichtsbedingungen in Zylinder- und Polarkoordinaten, ZAMM 18 (1938), S. 91 bis 92.

Berechnung der Zirkulation für die gerade, tragende Linie.

Von *E. Trefftz* † [1]).

1. Einleitung. Die Grundlage für die Berechnung von Auftrieb und induziertem Widerstand ist für eine gerade, tragende Linie die Prandtlsche Gleichung

$$\Gamma = \pi V t \left(\alpha - \frac{w}{V}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Hier bedeutet in üblicher Weise $\Gamma(x)$ die Zirkulation um den Flügel, V die Anblasegeschwindigkeit, $t(x)$ eine Größe, die nahezu gleich der Flügeltiefe ist, $\alpha(x)$ den Anstellwinkel von der Lage aus gerechnet, wo der Auftrieb Null ist, und w die vom Wirbelband herrührende Abwärtsgeschwindigkeit an der tragenden Linie. Nimmt man an, daß die Wirbelfäden im Falle schwacher Belastung geradlinig in Richtung der Grundströmung V nach rückwärts ablaufen, so ist w durch die Zirkulationsverteilung $\Gamma(x)$ bestimmt, so daß Gl. (1) bei gegebenem $t(x)$ und $\alpha(x)$ eine Gleichung für $\Gamma(x)$ darstellt. Ist die tragende Linie gerade und steht sie senkrecht zur Grundströmung, so kann man die Bestimmung von $\Gamma(x)$ auf eine potentialtheoretische Aufgabe zurückführen. Betrachtet man nämlich das Potential $\Phi(x, y)$ der Querströmung in den Ebenen senkrecht zur Grundströmung weit hinter der tragenden Linie, so ist am Schnitt des Wirbelbandes mit dieser Ebene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2),$$

$$\Gamma(x) = \Phi_o - \Phi_u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

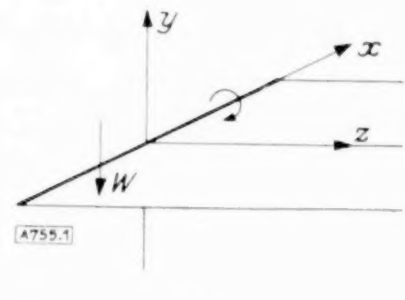


Abb. 1.

Abb. 2.

Φ_o und Φ_u sind dabei die Werte, die das Potential an der oberen und unteren Seite des Wirbelbandes annimmt. Da das Band eben ist, ist Φ eine ungerade Funktion von y, so daß

$$\Phi_o = -\Phi_u = \frac{1}{2}\Gamma(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

ist. Man kann sich also auf die obere Halbebene beschränken und die Potentialfunktion suchen, die längs der X-Achse außerhalb des Wirbelbandes, d. h. für $x < +\frac{b}{2}$ und $x > +\frac{b}{2}$ verschwindet und am Wirbelband, d. h. für $-\frac{b}{2} \leq x \leq +\frac{b}{2}$ der Gleichung

$$2\Phi = \pi V t(x) \left\{\alpha(x) + \frac{1}{2V}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

genügt. Führen wir am Wirbelbandschnitt die äußere Normale an die obere Halbebene ein und machen die Gl. (5) dimensionslos, indem wir

$$\Phi = \pi b V \varphi; \qquad t = b\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

setzen, so erhalten wir die Randbedingung (5) in der Form

$$\left.\begin{array}{ll} |x| > \frac{b}{2} & \varphi = 0 \\ |x| \leq \frac{b}{2} & 2\varphi = \tau(x)\left\{\alpha(x) - \frac{\pi b}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (7).$$

[1]) Diese Arbeit beabsichtigte Trefftz in dem im vorigen Jahre erschienenen DVL-Jubiläumsheft der Zeitschrift zu veröffentlichen. Das Manuskript fand sich unvollendet in seinem Nachlaß; es bricht mit Gl. (50) ab und ist im wesentlichen unverändert bis dahin hier abgedruckt. Trefftz hat wiederholt mit mir über die in der Arbeit behandelten Fragen gesprochen, und ich habe versucht, der Arbeit einen Abschluß zu geben, wie er ihn nach meiner Erinnerung etwa geplant hatte. Willers.

Betrachten wir die untere Halbebene, so ist am Rande, d. h. längs der x-Achse für

$$|x| > \frac{b}{2} \qquad \varphi = 0 \qquad \text{für } |x| \leq \frac{b}{2} \qquad \Phi = \Phi_u \qquad \text{also} \qquad -2\,\Phi_u = \pi V t(x) \left\{ a(x) + \frac{1}{2V} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\},$$

oder wenn wir unter τ eine Funktion verstehen, die am unteren Rande des Schnittes den Wert $\tau_u = -\frac{t}{b}$ annimmt, Φ nach (6) durch φ ersetzen und mit n die äußeren Normale der unteren Halbebene bezeichnen.

$$2\varphi = \tau(x) \left\{ \alpha(x) + \frac{\pi b}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Ermittelung von $\Gamma = \Phi_o - \Phi_u$ ist damit auf eine gemischte Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie zurückgeführt, die man entweder für die obere Halbebene allein, oder für die ganze, vom Wirbelband geschlitzte Ebene formulieren kann. Die Lösung kann in numerisch gegebenen Fällen in verschiedener Weise durchgeführt werden. Für einige Sonderfälle, z. B. für den Tragflügel von elliptischem Umriß sind strenge Lösungen bekannt. Im allgemeinen Falle hat man die Lösung durch Reihenentwicklung in der einen oder anderen Form approximiert. Das Unbefriedigende an diesen Verfahren ist, daß die Approximation an allen Unstetigkeitsstellen, z. B. an den Sprungstellen des Anstellwinkels schlecht wird, und daß man kein Verfahren kennt, den Fehler abzuschätzen[2]). Hiervon bin ich bei den folgenden Überlegungen ausgegangen. Ich gebe zunächst ein Verfahren an, um die Zirkulationsverteilung experimentell zu bestimmen, womit die Möglichkeit gegeben ist, eine Näherungslösung zu gewinnen. Daran schließen sich Betrachtungen, die die mathematischen Grundlagen für eine Fehlerschätzung enthalten.

2. Experimentelle Lösung der potentialtheoretischen Randwertaufgabe. Wir betrachten die Halbebene $y > 0$, an deren Rand ($= x$-Achse) die gesuchte Potentialfunktion φ die Randbedingung (7)

$$|x| > \frac{b}{2} \qquad \varphi = 0$$

$$|x| \leq \frac{b}{2} \qquad 2\varphi = \tau(x) \left\{ \alpha(x) - \frac{\pi b}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\}$$

erfüllen soll. Die letzte Gleichung schreiben wir mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{2} \tau(x)\, \alpha(x) = h(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

$$\frac{\pi b}{4} \tau(x) = l(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$\varphi + l \frac{\partial \varphi}{\partial n} = h(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Diese Randwertaufgabe läßt sich experimentell lösen. Es ist bekannt, daß man die gewöhnliche Randwertaufgabe der Potentialtheorie, wo am Rand eines Gebietes G die Werte von φ selbst vorgeschrieben sind, folgendermaßen mechanisch lösen kann: Man spannt in der x, y-Ebene über dem Gebiete G eine Membran aus und errichtet am Rande von G einen „Zaun", dessen Höhe über der x, y-Ebene den gegebenen Randwerten gleich (bzw. proportional) ist. Liegt dann die gleichmäßig gespannte Membran am Rande von G auf dem Zaun auf, so ist die gesuchte Funktion φ gleich (bzw. proportional) der Erhebung der Membran über der x, y-Ebene. Eine ähnliche Methode läßt sich anwenden, um die gemischte Randwertaufgabe zu lösen. Wir spannen die Membran, indem wir an den Randpunkten Fäden anbringen (streng genommen unendlich viele), die in der Richtung der Normalen eine überall gleiche Kraft von T kg pro cm ausüben. Wir lassen nun nicht die Membran am Rande von G

[2]) Frl. Dr. I. Lotz, die dankenswerterweise das Manuskript dieser Arbeit durchgesehen hat, macht darauf aufmerksam, daß demnächst in der Luftfahrtforschung eine Arbeit von H. Multhopp erscheinen wird, in der zur Behandlung der Unstetigkeitsstellen des Anstellwinkels, denen ja bei stetiger Zirkulationsverteilung und stetiger Tiefe gleiche Unstetigkeitsstellen des induzierten Winkels entsprechen, Zirkulationsverteilungen mit unstetiger Verteilung des induzierten Anstellwinkels auf Vorrat durchgerechnet werden. Bei einer vorliegenden Aufgabe kann man dann die unbekannte Zirkulationsverteilung in zwei Teile spalten unter Verwendung des einen vorliegenden Teiles. Sobald man durch diese Spaltung den Einfluß der Unstetigkeitsstellen abgetrennt hat, sind natürlich für die Restaufgabe Reihenansätze usw. durchaus bequem. W.

auf dem Zaun aufliegen, sondern wir errichten einen Zaun von der Höhe h in der Entfernung l auf der äußeren Normalen zum Rande und führen die Fäden über diesen Zaun. Dann genügt die Erhebung φ der Membran über die x, y-Ebene der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und erfüllt (siehe Abb. 3) am Rande die Bedingung

$$h = \varphi + l\frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{(12)},$$

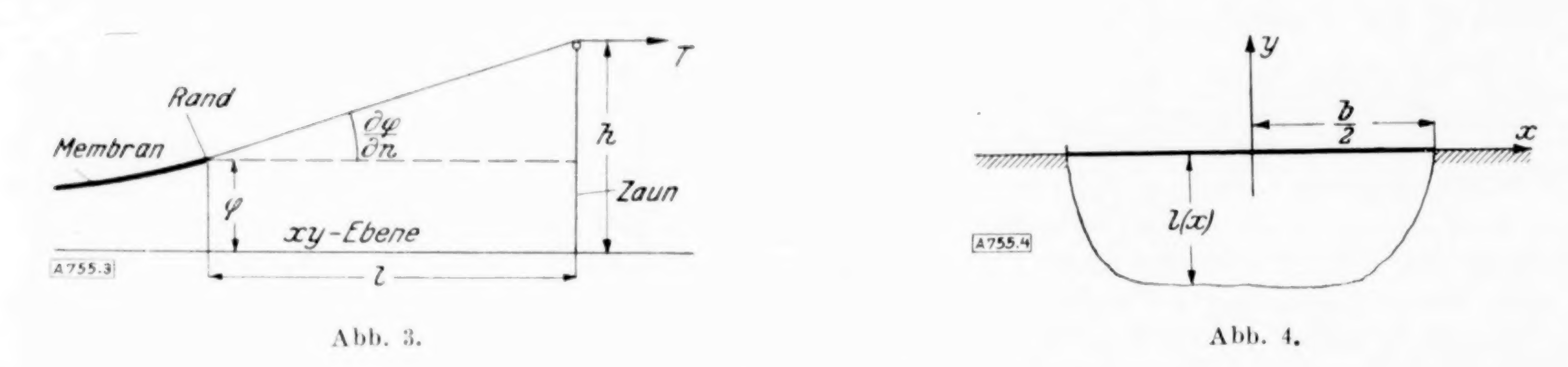


Abb. 3. Abb. 4.

d. h. sie löst eine Randwerteaufgabe von dem uns interessierenden Typus. Zur Berechnung der Zirkulation der geraden, tragenden Linie müßte man also eigentlich die ganze obere Halbebene mit einer Membran überspannen. Für $|x| > \frac{b}{2}$ ist $\varphi = 0$ vorgeschrieben, d. h. man müßte außerhalb des Wirbelbandschnittes die Membran längs der x-Achse festhalten. Für $|x| \leq \frac{b}{2}$, längs des Wirbelbandschnittes, müßte man nach Gl. (11) in der Entfernung $l(x)$ in der Richtung der Normalen (d. h. des negativen y) einen Zaun der Höhe h errichten und die die Membran nach unten spannenden Fäden über diesen Zaun legen. Die Erhebung der Membran gibt dann die Größe von φ an jeder Stelle, insbesondere längs des Wirbelbandschnittes, wo $2\pi b V\varphi = \Gamma$ ist.

Um der Unbequemlichkeit zu entgehen, daß das in Frage kommende Gebiet sich ins Unendliche erstreckt, kann man die Halbebene $y > 0$ auf einen Kreis vom Radius a um den Nullpunkt einer ξ, η-Ebene konform abbilden, was nach Einführung der komplexen Zahlen

$$z = x + i\,y; \qquad \zeta = \xi + i\,\eta \quad \text{(13)}$$

durch die Gleichung

$$z = \frac{b}{2\,i} \cdot \frac{\zeta + i\,a}{\zeta - i\,a} \quad \text{(14)}$$

geschieht. Durch diese Abbildung geht die Halbebene $y > 0$ in das Innere des Kreises in der ζ-Ebene über, das Unendliche U in den Punkt $\zeta = i\,a$, der Schnitt L, M, R des Wirbelbandes in den unteren Halbkreis $|\zeta| = a$, die x-Achse außerhalb des Wirbelschnittes in den oberen, wie es die Bezeichnungen durch gleiche Buchstaben in der Abb. 5 erkennen läßt.

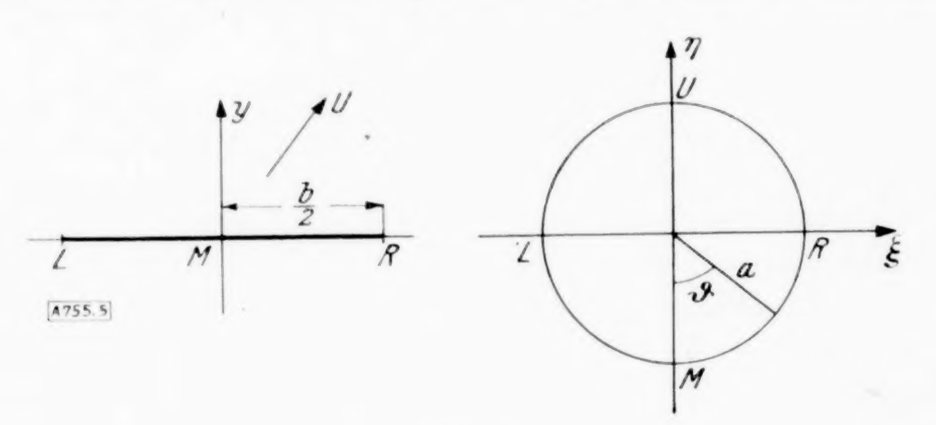


Abb. 5.

Zwischen der Normalableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ am Wirbelbandschnitt in der x, y-Ebene und der Normalableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ am Bildkreis der ξ, η-Ebene besteht die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \quad \text{(15)}.$$

Nun ist

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{-a\,b}{(\zeta - i\,a)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16),$$

also

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \frac{|\zeta - i\,a|^2}{a\,b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18).$$

Setzt man in der ζ-Ebene (Abb. 5)

$$\xi = \varrho \sin \vartheta; \qquad \eta = -\varrho \cos \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19),$$

so wird am Rande des Bildkreises

$$|\zeta - i\,a| = 2\,a \cos \frac{\vartheta}{2},$$

also

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \frac{4\,a \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \cdot \frac{4\,a \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

und die am Wirbelbandschnitt vorgeschriebene Randbedingung (7)

$$2\,\varphi = \tau \left\{a - \frac{\pi\,b}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

wird für den entsprechenden Halbkreis L, M, R in der ζ-Ebene

$$2\,\varphi = \tau\,a - 2\,\pi\,\tau\,a \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23).$$

Setzt man hier wieder

$$\frac{\tau\,a}{2} = h, \qquad \pi\,\tau\,a \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24),$$

so hat die Randbedingung wieder die Form

$$\varphi + l\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = h \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (25),$$

welche der Näherungslösung mit der Membran zugänglich ist.

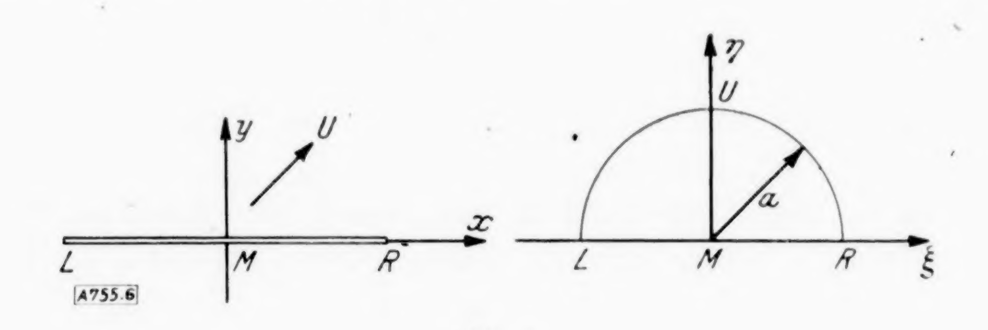


Abb. 6.

Es sei hier noch die konforme Abbildung erwähnt, welche die Halbebene $y > 0$ in einen Halbkreis der ζ-Ebene überführt, wie Abb. 6 zeigt; denn es ist für die Anwendung bequem, wenn das Bild L, M, R des Wirbelbandes, längs dessen die Erhebung der Membran gemessen wird, geradlinig ist. Die Abbildungsfunktion ist:

$$z = \frac{a\,b\,\zeta}{\zeta^2 + a^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (26);$$

man bestätigt die Formel sofort. Ist ζ reell, so ist auch z reell; die Punkte $\zeta \leqq \pm\, a$ gehen in die Punkte $z \leqq \pm \frac{b}{2}$ über, d. h. der Wirbelschnitt wird in den horizontalen Durchmesser des Kreises mit dem Radius a um den Nullpunkt der ζ-Ebene abgebildet. Für den oberen

Halbkreis wird $\zeta = a\,e^{i\vartheta}$, $z = \dfrac{b}{2\cos\vartheta}$, d. h. er entspricht der x-Achse außerhalb des Wirbelschnittes. Differentiation ergibt:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{a\,b\,(a^2 - \zeta^2)}{(a^2 + \zeta^2)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Zwischen der Normalableitung $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\left(= -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ am Wirbelschnitt in der z-Ebene und der Normalableitung $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}\left(= -\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)$ in den entsprechenden Punkten des Durchmessers L, M, R der ζ-Ebene besteht die Beziehung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\,\frac{(a^2 + \xi^2)^2}{a\,b\,(a^2 - \xi^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Damit wird die Randbedingung (7)

$$2\,\varphi = \tau\left\{a - \frac{\pi}{2\,a}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\,\frac{(a^2 + \xi^2)^2}{(a^2 - \xi^2)}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Um auf die Form

$$\varphi + l\,\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = h$$

zu kommen, setzt man

$$l = \frac{\pi}{4\,a}\,\frac{\tau\,(a^2 + \xi^2)^2}{a^2 - \xi^2}, \qquad h = \frac{\tau\,a}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

Für $\xi \to a$ wird $l \to \infty$, wenn τ nicht mindestens so Null wird, wie beim elliptischen Flügel, was bei dem Membrangleichnis eine praktische Schwierigkeit bedeutet. Da andererseits die Punkte $\left(z \to \pm\dfrac{b}{2};\ \zeta \to \pm a\right)$ am Ende der tragenden Linie in der ζ-Ebene auseinandergezogen werden $\left(\dfrac{d\zeta}{dz} \to \infty\right)$, was die Genauigkeit erhöht, kann man die Schwierigkeit in Kauf nehmen.

In diesem Falle wäre also der Zaun in der Entfernung l senkrecht unter dem horizontalen Durchmesser L, M, R anzubringen. Seine Höhe ist stets $\dfrac{\tau\,a}{2}$. Auf diese Weise kann man Näherungswerte für die Zirkulation $\Gamma(x)$ erhalten.

3. Integralgleichung für die Zirkulation. Vom Standpunkt der praktischen Rechnung ist es häufig nicht nötig, die Konvergenz eines Rechenverfahrens nachzuweisen; wichtiger ist es, die Genauigkeit eines Näherungswertes beurteilen zu können, den man irgendwie — durch Näherungsrechnung, experimentell oder auch nur gefühlsmäßig — gewonnen hat. Um das für die Zirkulationsberechnung zu erreichen, will ich — in bekannter Weise — für die Verteilung der Zirkulation Γ eine Integralgleichung ableiten, welche die bei den gewöhnlichen Integro-Differentialgleichungen auftretende Singularität des Kernes vermeidet.

Wir bilden zunächst die x, y-Ebene derart auf das Äußere des Einheitskreises einer ξ, η-Ebene ab, daß der Wirbelbandschnitt in den Rand des Einheitskreises übergeht. Das geschieht bekanntermaßen, wenn $\zeta = \xi + i\,\eta$ gesetzt wird durch die Funktion

$$z = \frac{b}{4}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31).$$

Daraus folgt

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{b}{4}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32).$$

Am Rande des Einheitskreises wird $\zeta = e^{i\vartheta}$, also

$$z = \frac{b}{2}\cos\vartheta; \qquad \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{b}{2}\sin\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33).$$

Wir rechnen die Randbedingungen (7) und (8) auf die Koordinaten ξ, η um und führen zu diesem Zweck in der ξ, η-Ebene Polarkoordinaten ϱ, ϑ ein.

$$\xi = \varrho\cos\vartheta; \qquad \eta = \varrho\sin\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Die obere und untere Kante des Wirbelbandschnittes entsprechen dem oberen und unteren Halbkreis in der ζ-Ebene, hier ist

$$\text{oben:} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\frac{2}{b \sin \vartheta} \quad \ldots \quad (35),$$

$$\text{unten:} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = +\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\frac{2}{b \sin \vartheta} \quad \ldots \quad (36).$$

Führt man wie oben die Funktion τ so ein, daß

$$\text{oben:} \quad \tau = \frac{t}{b}, \quad \text{unten:} \quad \tau = -\frac{t}{b} \quad \ldots \quad (37)$$

wird, so schreiben sich die Randbedingungen für den oberen und unteren Rand in der gleichen Form

$$2\varphi = \tau \left\{a + \frac{\pi}{\sin \vartheta}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right\} \quad \ldots \quad (38).$$

Von hier kommt man zu einer Integralgleichung für die Randwerte von φ, indem man von der Randwertdarstellung für den Wert φ in einem beliebigen Punkte P

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int \bar{\varphi}\frac{\partial \ln R}{\partial \nu}\, ds - \frac{1}{2\pi}\int \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}} \ln R\, ds \quad \ldots \quad (39)$$

ausgeht und den Punkt P dann in den Rand rücken läßt. Hier bedeuten:

$\bar{\varphi}$ den Wert von φ in einem Randpunkt,

$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}}$ die Ableitung nach der äußeren Normalen,

R die Entfernung vom Punkte P zu einem Randpunkt,

ds das Längenelement des Randes.

Die Integrale der rechten Seite sind über den Rand zu erstrecken, in unserem Falle also über den Einheitskreis der ζ-Ebene, wobei zu beachten ist, daß ν die äußere Normale an das betrachtete Außengebiet des Einheitskreises ist, so daß $\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial \varrho}$ wird. Das Unendliche trägt zu den Randintegralen nichts bei, weil φ im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet. Läßt man den Punkt P in einen Randpunkt P^* des Einheitskreises rücken, so bedarf das erste Integral $\int \bar{\varphi}\frac{\partial \ln R}{\partial \nu}\, ds$ einer besonderen Betrachtung. Legen wir von P aus die Tangenten $P\alpha$ und $P\beta$ an den Einheitskreis, so ist, wenn P sich P^* nähert (Abb. 7) auf dem großen Bogen

$$\frac{\partial \ln R}{\partial \nu}\, ds = -d\Theta \quad \ldots \quad (41)$$

und auf dem kleinen Bogen

$$\frac{\partial \ln R}{\partial \nu}\, ds = +d\Theta \quad \ldots \quad (42),$$

wo $d\Theta$ der Winkel ist, unter dem das Element ds von P aus gesehen wird. Rückt jetzt P sehr nahe an P^*, so rücken auch die Punkte α und β immer näher an P^* und der Winkel $\alpha P \beta$ geht gegen π. Der von dem kleinen Bogen $\alpha\beta$ herrührende Anteil wird, da die Randwerte stetig sind

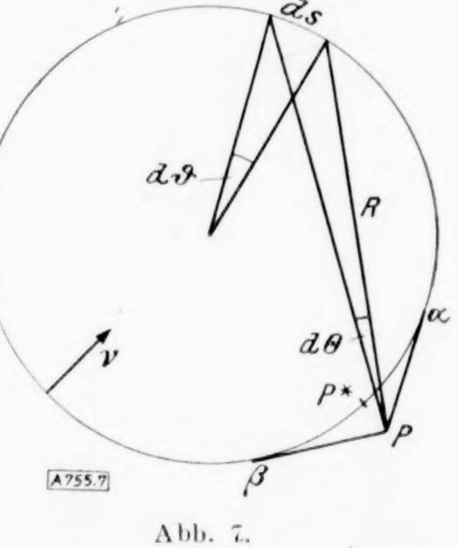


Abb. 7.

$$\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \bar{\varphi}\, d\Theta \rightarrow \frac{\varphi(P^*)}{2\pi}\int_\alpha^\beta d\Theta \rightarrow \frac{\varphi(P^*)}{2} \quad \ldots \quad (43).$$

Der über den großen Bogen zu nehmende Anteil des Integrales verschwindet in der Grenze, denn wenn P nach P^* rückt, wird

$$d\,\Theta = \frac{1}{2}\,d\,\vartheta$$

(Peripheriewinkel gleich dem halben Zentriwinkel), α und β rücken beliebig nahe an P^* heran, also wird das Integral

$$\oint \varphi\,d\,\Theta = \frac{1}{2}\oint \overline{\varphi}\,d\,\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (44),$$

d. h. gleich dem halben Mittelwert von φ auf dem Rande; dieser ist aber gleich Null, weil φ auf dem oberen und unteren Halbkreis entgegengesetzt gleiche Werte hat. Es bleibt also nur übrig

$$\lim_{P \to P^*} \frac{1}{2\,\pi}\int \overline{\varphi}\,\frac{\partial \ln R}{\partial\,\nu}\,d\,s = \frac{1}{2}\,\varphi\,(P^*) \quad \ldots\ldots \quad (45).$$

Setzen wir das in die Randwertdarstellung (39) ein, so erhalten wir

$$\varphi\,(P^*) = \frac{1}{\pi}\oint \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\varrho}\ln R\,d\,s \quad \ldots\ldots \quad (46).$$

Ist σ der den Punkt P^* charakterisierende Winkel, ϑ der Winkel für einen beliebigen anderen Punkt, so ist

$$R = 2\sin\frac{|\vartheta - \sigma|}{2} \quad \ldots\ldots \quad (47),$$

$$d\,s = d\,\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (48).$$

Aus der Randbedingung (38) erhalten wir ferner

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\varrho} = -\frac{\sin\vartheta}{\pi}\,\alpha + \frac{2\,\varphi\sin\vartheta}{\pi\,\tau} \quad \ldots\ldots \quad (49);$$

setzen wir alles in (46) ein, erhalten wir **die gesuchte Integralgleichung**:

$$\varphi\,(\sigma) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\ln\left(2\sin\frac{|\vartheta-\sigma|}{2}\right)\sin\vartheta\,\alpha\,(\vartheta)\,d\,\vartheta + \frac{2}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\ln\left(2\sin\frac{|\vartheta-\sigma|}{2}\right)\frac{\sin\vartheta}{\tau\,(\vartheta)}\,\varphi\,(\vartheta)\,d\,\vartheta \quad (50)$$ [3].

In dieser Gleichung ist das erste Glied der rechten Seite, in dem nur bekannte Funktionen vorkommen, nur von σ abhängig. In dem zweiten Gliede kommt die gesuchte Funktion $\varphi\,(\vartheta)$ mit einem unsymmetrischen Kern vor. Um diesen zu symmetrisieren, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $\sqrt{\frac{\sin\sigma}{\tau\,(\sigma)}}$ und führt dann die folgenden Abkürzungen ein:

$$\psi\,(\sigma) = \varphi\,(\sigma)\sqrt{\frac{\sin\sigma}{\tau\,(\sigma)}} \quad \ldots\ldots \quad (51),$$

$$f\,(\sigma) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{\sin\sigma}{\tau\,(\sigma)}}\int_0^{2\pi}\ln\left(2\sin\frac{|\vartheta-\sigma|}{2}\right)\sin\vartheta\,\alpha\,(\vartheta)\,d\,\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (52),$$

$$K\,(\sigma,\tau) = +\frac{2}{\pi^2}\ln\left(2\sin\frac{|\vartheta-\sigma|}{2}\right)\sqrt{\frac{\sin\vartheta\cdot\sin\sigma}{\tau\,(\vartheta)\cdot\tau\,(\sigma)}} \quad \ldots\ldots \quad (53).$$ [4]

[3]) S. Anm. 1.

[4]) Ebenfalls eine Umformung der Prandtlschen Integro-Differentialgleichung in eine reine Integralgleichung gibt Gebelein im Ingenieurarchiv VII (1936), S. 299 bis 325 unter Benutzung einer von Betz gegebenen Darstellung der Zirkulation als Funktion des Abwindes. Der Kern dieser Gleichung (s. die Gl. (27) bzw. (28) der Gebeleinschen Arbeit) stimmt wesentlich mit den hier (50) bzw. (53) gegebenen überein, wie man erkennt, wenn man beachtet, daß Gebelein von 0 bis π, Trefftz von 0 bis 2π integriert.

Damit hat man einen symmetrischen Kern gewonnen und man hat nun weiter die Gleichung

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) + \lambda \int K(\sigma, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

zu betrachten, die für $\lambda = 1$ der Gl. (50) entspricht.

4. Fehlerabschätzung der Näherungswerte. Zunächst zeigen wir, daß der Kern der Gl. (54) negativ definit ist. Dazu ist nachzuweisen, daß sämtliche Eigenwerte negativ sind. Eigenfunktionen der Gl. (54) sind die Funktionen, die eine Lösung von (54) für $f(\sigma) = 0$, also für $\alpha(\vartheta) = 0$ ergeben, d. h. also Potentialfunktionen, die nach (38) der Randbedingung

$$\frac{2 \sin \vartheta}{\pi\, \tau(\vartheta)}\, \varphi = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

genügen, wo entsprechend (54) das λ eingeführt ist. Nach Multiplikation mit φ und Integration über den Kreisumfang folgt aus dieser Gleichung

$$\frac{2}{\pi} \oint \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)}\, \varphi^2\, d\vartheta = -\lambda \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (56).$$

Das hier auf der linken Seite stehende Integral ist sicher positiv, denn $\sin \vartheta$ ist eine ungerade Funktion von ϑ und ebenso nach (37) $\tau(\vartheta)$. Aber auch das Integral auf der rechten Seite ist positiv, denn aus der Gleichung

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) = \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad}^2 \varphi\,,$$

in der das erste Glied der rechten Seite, da es sich um Potentialfunktionen handelt, Null ist, folgt durch Integration über das Äußere des Einheitskreises mit Benutzung des Gaußschen Satzes

$$\iint \operatorname{grad}^2 \varphi\, d\xi \cdot d\eta = \iint \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi)\, d\xi \cdot d\eta = \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, d\vartheta\,.$$

Die beiden in Gl. (56) auftretenden Integrale sind somit positiv, d. h. die Gl. (56) kann nur für negative Werte von λ bestehen. Für alle Eigenwerte gilt daher

$$\lambda_m < 0 \quad \ldots \ldots \quad (57).$$

Damit ist gezeigt, daß $K(\sigma, \vartheta)$ negativ definit ist.

Für die Abschätzung der Genauigkeit einer Näherungsfunktion, wie man sie etwa an der oben beschriebenen Weise gewinnen kann, haben wir nun noch den folgenden Hilfssatz nötig:

Für die Lösung einer Integralgleichung der Form (54)

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) + \lambda \int K(\sigma, \vartheta)\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta\,,$$

deren symmetrischer Kern negativ definit ist, gilt, wenn $\lambda > 0$ ist, die Ungleichung

$$\int \varphi^2(\sigma)\, d\sigma \leqq \int f^2(\sigma)\, d\sigma \quad \ldots \ldots \quad (58).$$

Um das nachzuweisen, multipliziert man diese Integralgleichung mit ihrer m-ten Eigenfunktion $\varphi_m(\sigma)$, für die bekanntlich die Gleichung

$$\varphi_m(\sigma) = \lambda_m \int K(\sigma, \vartheta)\, \varphi_m(\vartheta)\, d\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (59)$$

gilt und integriert. Setzt man dabei zur Abkürzung

$$c_m = \int \varphi(\sigma)\, \varphi_m(\sigma)\, d\sigma \quad \text{und} \quad f_m = \int f(\sigma)\, \varphi_m(\sigma)\, d\sigma\,,$$

so erhält man, wenn man beachtet, daß der Kern als symmetrisch vorausgesetzt war,

$$c_m = f_m + \frac{\lambda}{\lambda_m} c_m \quad \text{oder} \quad c_m = \frac{f_m}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_m}}.$$

Wegen $\lambda_m < 0$ ist für $\lambda \geqq 0$ der Nenner $1 - \frac{\lambda}{\lambda_m} \geqq 1$, somit gilt für jedes m

$$|c_m| \leqq |f_m| \qquad (60)$$

und damit

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \leqq \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2 .$$

Diese Ungleichung ergibt sich aus (58), wenn man für $\varphi(\sigma)$ und $f(\sigma)$ die Entwicklung nach Eigenfunktionen einsetzt, ausquadriert und gliedweise integriert. Damit ist also die Richtigkeit der Ungleichung (58) bewiesen.

Nun haben wir alle Hilfsmittel zur Abschätzung der Genauigkeit einer Näherungslösung $p(\sigma)$ der Integralgleichung (50), die wir hier in der Form

$$\varphi(\sigma) = \bar{f}(\sigma) + \frac{2}{\pi^2} \int \ln R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} \varphi(\vartheta) \, d\vartheta \qquad (61)$$

schreiben wollen, beisammen. Diese Näherungslösung $p(\vartheta)$ möge der Gleichung

$$p(\sigma) = g(\sigma) + \frac{2}{\pi^2} \int \ln R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} p(\vartheta) \, d\vartheta \qquad (62)$$

genügen, in der nur bekannte Funktionen vorkommen. Zieht man diese Gleichung von (61) ab und setzt den Unterschied zwischen genäherter und richtiger Lösung $p(\sigma) - \varphi(\sigma) = F(\sigma)$, so erhält man eine Integralgleichung für den Fehler $F(\sigma)$

$$F(\sigma) = g(\sigma) - \bar{f}(\sigma) + \frac{2}{\pi^2} \int \ln R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} F(\vartheta) \, d\vartheta \qquad (63).$$

Um daraus eine Fehlerabschätzung zu gewinnen, formen wir zunächst das Integral auf der rechten Seite mittels der Schwarzschen Ungleichung um. Es wird

$$\left(\int \ln R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} F(\vartheta) \, d\vartheta \right)^2 \leqq \int \ln^2 R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} d\vartheta \cdot \int F^2(\sigma) \frac{\sin \sigma}{\tau(\sigma)} d\sigma \qquad (64).$$

Symmetrisiert man nun die Gl. (63) durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{\sin \sigma}{\tau(\sigma)}}$, so erhält man, wie oben bewiesen, eine Integralgleichung mit negativ definitem Kern, auf die man also den oben bewiesenen Hilfssatz anwenden darf, d. h. es wird

$$\int F^2(\sigma) \frac{\sin \sigma}{\tau(\sigma)} d\sigma < \int (g(\sigma) - \bar{f}(\sigma))^2 \frac{\sin \sigma}{\tau(\sigma)} d\sigma \qquad (65).$$

Hier gilt, da $\lambda = 1$ ist, nur das Ungleichungszeichen. Durch Einführung dieser Ungleichung in (64) wird diese Ungleichung noch verschärft. Es wird

$$\left(\int \ln R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} F(\vartheta) \, d\vartheta \right)^2 < \int \ln^2 R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} d\vartheta \cdot \int (g(\sigma) - \bar{f}(\sigma))^2 \frac{\sin \sigma}{\tau(\sigma)} d\sigma \qquad (66).$$

Und wenn man das wieder in (63) einführt, erhält man

$$|F(\sigma)| < |g(\sigma) - \bar{f}(\sigma)| + \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\int \ln^2 R(\sigma, \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{\tau(\vartheta)} d\vartheta \cdot \int (g(\sigma) - \bar{f}(\sigma))^2 \frac{\sin \sigma}{\tau(\sigma)} d\sigma} .$$

Da jetzt auf der rechten Seite nur bekannte Funktionen stehen, hat man damit die gesuchte Fehlerabschätzung gefunden.

Das Durchschlagen eines schwach gekrümmten Stabes.

Von *C. B. Biezeno* in Delft[1]).

1. Einleitung. In dieser kurzen Mitteilung kommen wir auf einen Belastungsfall zurück, welchen wir vor einigen Jahren in den Abhandlungen der „Koninklijke Academie van Wetenschappen[2])" schon einmal untersuchten. Es handelte sich dabei um das „Durchschlagen" eines schwach gekrümmten Stabes, und es hat sich gezeigt, daß dieser Vorgang einer mehr in Einzelheiten gehenden Diskussion fähig ist[3]). Zunächst stellen wir der besseren Übersicht wegen in Ziffer **2** die früher erhaltenen Ergebnisse zusammen und fassen in Ziffer **3** die Aufgabe noch einmal von neuem an.

2. Erste Methode. Der in seinen Enden gelenkig gelagerte schwach gekrümmte Stab (Sehnenlänge $2l$), welcher in seiner Mitte von einer Einzellast $2P$ belastet wird, ist in Abb. 1 dargestellt. Die Gleichung der elastischen Mittellinie im unbelasteten Zustand sei in bezug auf das in dieser Abbildung gezeichnete Koordinatensystem

$$y_0 = \frac{1}{2R}(l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1);$$

die Krümmung des Stabes sei so gering, daß sie in jedem Punkte gleich $1/R$ gesetzt werden kann.

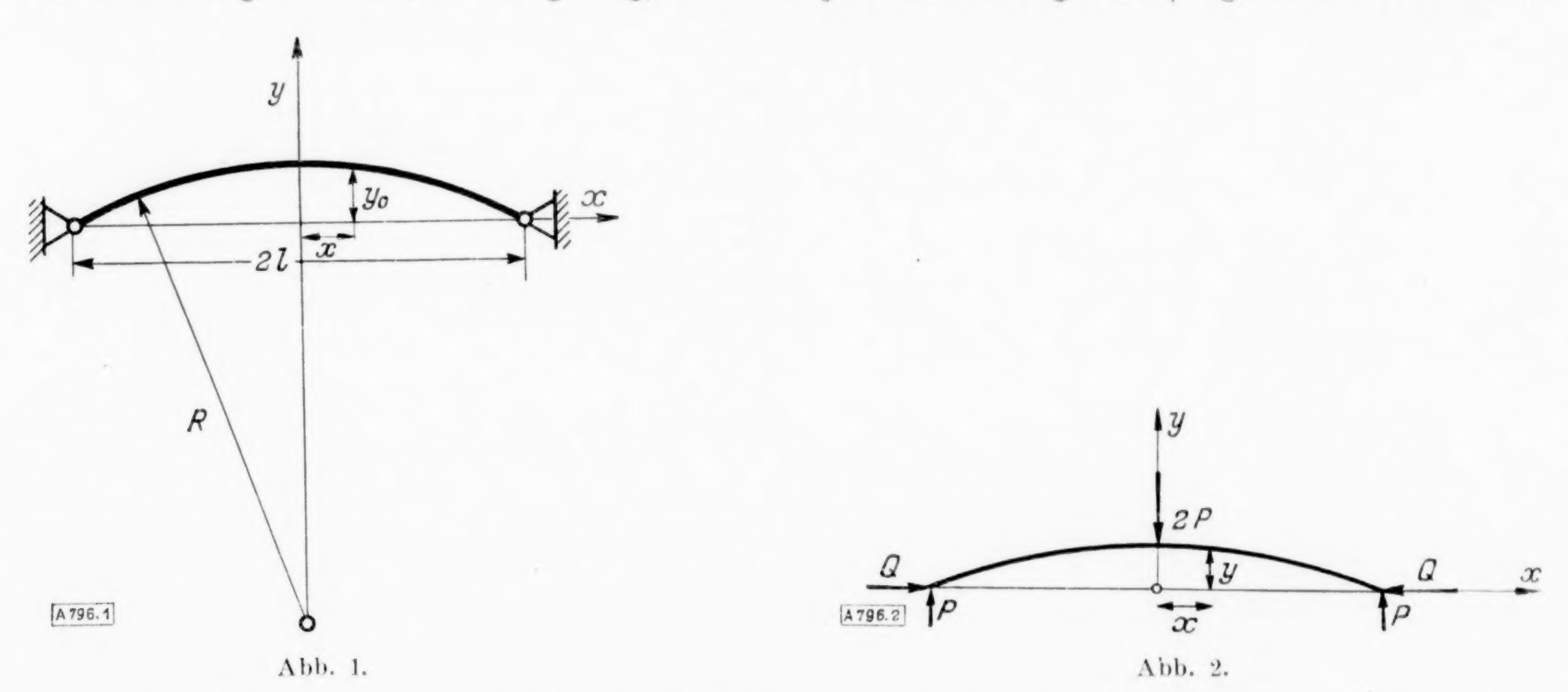


Abb. 1. Abb. 2.

Bezeichnet y die Ordinate eines Punktes der deformierten Stabmittellinie und ϱ deren Krümmungsradius (siehe Abb. 2), so gilt für die rechte Stabhälfte

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R} = -\frac{M}{EI} = \frac{-P(l-x) + Qy}{EI}$$

oder, wenn $Q : EI = \mu^2$ und näherungsweise $1 : \varrho = -y''$ gesetzt wird,

$$y'' + \mu^2 y = \frac{P(l-x)}{EI} - \frac{1}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Beschränkt man sich vorläufig auf den Fall des symmetrischen Deformationszustandes, so gelten zur Bestimmung der beiden in der allgemeinen Lösung

$$y = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \frac{P}{Q}(l-x) - \frac{1}{\mu^2 R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

dieser Gleichung auftretenden Integrationskonstanten C_1 und C_2 die folgenden Randbedingungen:

$$y' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{für} \quad x = l,$$

und man findet somit

$$C_1 = \frac{1}{\mu^2 R \cos \mu l} - \frac{P}{\mu^3 EI} \operatorname{tg} \mu l; \qquad C_2 = \frac{P}{\mu Q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

[1]) Meinem Mitarbeiter Herrn Dr. J. J. Koch möchte ich auch an dieser Stelle meinen Dank für seine Unterstützung beim Abfassen dieser Abhandlung aussprechen.

[2]) C. B. Biezeno: Über eine Stabilitätsfrage beim gelenkig gelagerten schwach gekrümmten Stab (Kon. Acad. v. Wetenschappen te Amsterdam, Proc. Vol. XXXII no. 7, 1929).

[3]) Wie mir aus einer schriftlichen Mitteilung bekannt ist, hat auch Herr K. Marguerre dieselbe Aufgabe noch einmal von einer anderen Seite, nämlich nach der Energiemethode, angefaßt.

Bezeichnet L_0 die halbe Stablänge in unbelasteten, L die halbe Stablänge im belasteten Zustand, und setzt man die im Stabquerschnitt auftretende Normalkraft näherungsweise gleich Q, so gilt, wenn noch $I = F\,i^2$ gesetzt wird,

$$L_0 - L = \frac{Q\,l}{E\,F} = \frac{\mu^2\,I\,l}{F} = \mu^2\,i^2\,l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Nun ist

$$L_0 = \int_0^l \sqrt{1 + y_0'^2}\,d\,x \sim l + \frac{1}{2}\int_0^l y_0'^2\,d\,x, \qquad L = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2}\,d\,x \sim l + \frac{1}{2}\int_0^l y'^2\,d\,x,$$

so daß (5) übergeht in:

$$\int_0^l y_0'^2\,d\,x - \int_0^l y'^2\,d\,x = 2\,\mu^2\,i^2\,l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Setzt man schließlich noch zur Abkürzung

$$\frac{R}{l} = p, \quad \frac{i}{l} = q, \quad \frac{P\,l^2}{E\,I} = s, \quad p\,s = t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7),$$

so geht (6) unter Benutzung von (1), (3) und (4) über in:

$$\mu\,l\left[\frac{1}{p\,\mu^2\,l^2} - \frac{s}{\mu^3\,l^3}\sin\mu\,l\right]^2\left[-\frac{1}{4}\sin 2\,\mu\,l + \frac{1}{2}\,\mu\,l\right] + \frac{s^2}{\mu^5\,l^5}\left[\frac{1}{4}\sin 2\,\mu\,l + \frac{1}{2}\,\mu\,l\right]\cos^2\mu\,l$$
$$+ \frac{s^2}{\mu^4\,l^4}\cos^2\mu\,l + \frac{2\,s}{\mu^2\,l^2}\left[\frac{1}{p\,\mu^2\,l^2} - \frac{s}{\mu^3\,l^3}\sin\mu\,l\right][1 - \cos\mu\,l]\cos\mu\,l - 2\,\frac{s^2}{\mu^5\,l^5}\sin\mu\,l\cos^2\mu\,l$$
$$- \frac{s}{\mu^2\,l^2}\left[\frac{1}{p\,\mu^2\,l^2} - \frac{s}{\mu^3\,l^3}\sin\mu\,l\right]\cos\mu\,l\sin^2\mu\,l = \frac{1}{3\,p^2}\cos^2\mu\,l - 2\,\mu^2\,l^2\,q^2\cos^2\mu\,l,$$

oder bei weiterer Vereinfachung in

$$\left.\begin{aligned} & t^2\left[1 + \frac{\cos 2\,\mu\,l}{2} - \frac{3}{4}\,\frac{\sin 2\,\mu\,l}{\mu\,l}\right] - 2\,t\left[\frac{1}{2} - \cos\mu\,l + \frac{1}{2}\,\mu\,l\sin\mu\,l + \frac{1}{2}\cos 2\,\mu\,l\right] \\ & \quad + \left[\frac{\mu^2\,l^2}{2} - \frac{\mu^4\,l^4}{6}(1 - 6\,p^2\,q^2\,\mu^2\,l^2)(1 + \cos 2\,\mu\,l) - \frac{\mu\,l\sin 2\,\mu\,l}{4}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8).$$

Diese Gleichung benutzen wir zum Entwerfen eines Diagrammes, welches für verschiedene Werte des Parameters $(p\,q)$ den Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Größen $t = \frac{R\,l}{E\,I}\,P$ und $\mu^2\,l^2 = \frac{l^2}{E\,I}\,Q$ darstellt. Am besten löst man bei einem fest angenommenen $(p\,q)$-Werte Gl. (7) nach t für verschiedene Werte von $\mu\,l$. Es entstehen dann Kurven, wie sie in Abb. 3 für die Werte

$$p\,q = \sqrt{\frac{2}{3\,\pi^2}}, \quad \sqrt{\frac{3{,}88}{6\,\pi^2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{3\,\pi^2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{6\,\pi^2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{12\,\pi^2}} \quad \ldots \ldots (9)$$

wiedergegeben sind. Aus ihnen liest man die sogenannte „Durchschlagkraft" unmittelbar ab. Denn verfolgt man für einen Stab von vorgeschriebenem $(p\,q)$ den Belastungsvorgang von

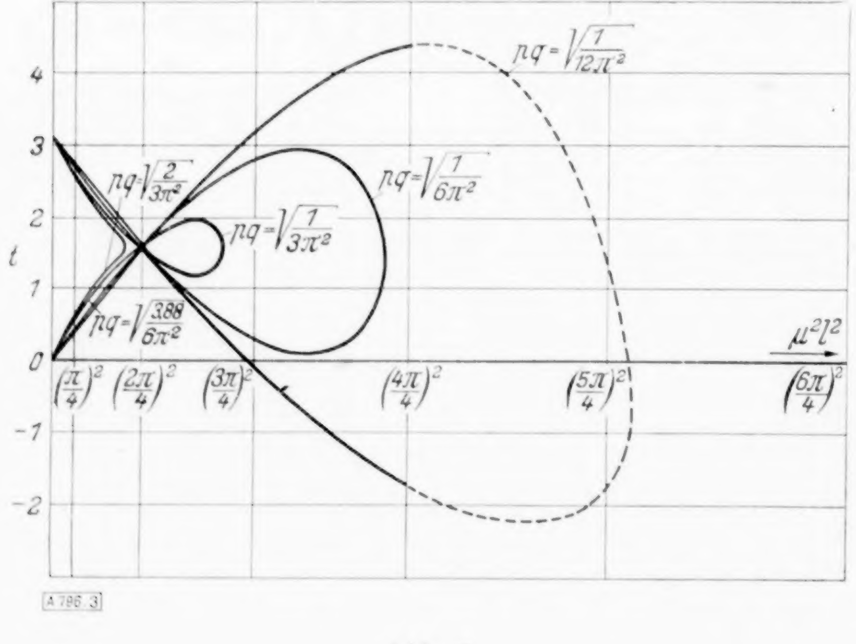


Abb. 3.

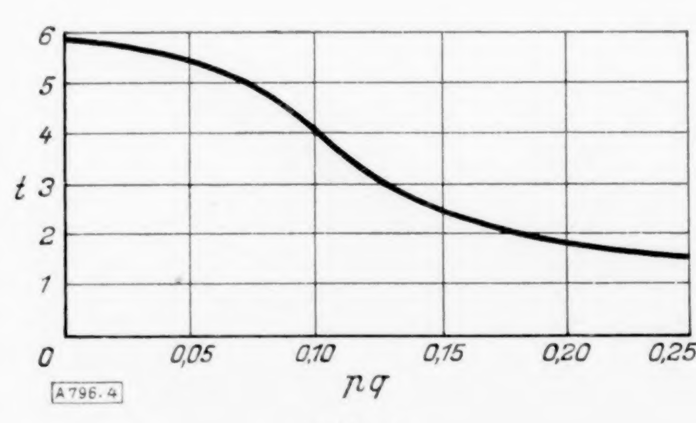


Abb. 4.

$P=0$ an, so erblickt man, daß zur Fortsetzung des Deformationsvorganges eine Vergrößerung der belastenden Kraft in dem Augenblicke entbehrlich wird, in dem die zugehörige Abbildungskurve eine horizontale Tangente aufweist. Weil, wie wir gleich zeigen, für Werte von $pq>\sqrt{\frac{3,88}{6\pi^2}}=0,256$ die Abbildungskurve keine horizontale Tangente besitzt, ist ein Durchschlagen des Stabes in diesem Falle nicht möglich. Dagegen hat die Abbildungskurve für jedes $pq<\sqrt{\frac{3,88}{6\pi^2}}$ eine Schleife, auf welcher man leicht den „ersten" Punkt mit horizontaler Tangente feststellt. Abb. 4 zeigt den in dieser Weise bestimmten kritischen t-Wert (welcher direkt der Durchschlagkraft P proportional ist) in seiner Abhängigkeit vom Parameter (pq). Zum Beweise der obenerwähnten Aussage schreiben wir mit $\mu l=u$, Gl. (8) in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}F(t,u)=t^2\left[1+\frac{\cos 2u}{2}-\frac{3}{4}\frac{\sin 2u}{u}\right]-2t\left[\frac{1}{2}-\cos u+\frac{1}{2}u\sin u+\frac{1}{2}\cos 2u\right]\\+\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{6}(1-6p^2q^2u^2)(1+\cos 2u)-\frac{u\sin 2u}{4}\right]=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(10),$$

bestimmen

$$\frac{\partial F}{\partial u}=t^2\left[-\sin 2u-\frac{3}{2}\frac{\cos 2u}{u}+\frac{3}{4}\frac{\sin 2u}{u^2}\right]-2t\left[\frac{3}{2}\sin u+\frac{1}{2}u\cos u-\sin 2u\right]$$
$$+u-\frac{2u^3}{3}(1-6p^2q^2u^2)(1+\cos 2u)+2p^2q^2u^5(1+\cos 2u)$$
$$+\frac{u^4}{3}(1-6p^2q^2u^2)\sin 2u-\frac{\sin 2u}{4}-\frac{u\cos 2u}{2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=2t\left[1+\frac{\cos 2u}{2}-\frac{3}{4}\frac{\sin 2u}{u^2}\right]-2\left[\frac{1}{2}-\cos u+\frac{1}{2}u\sin u+\frac{1}{2}\cos 2u\right]$$

und kontrollieren leicht, daß

$$t=(-1)^k\frac{(2k+1)\pi}{2},\qquad u=\frac{(2k+1)\pi}{2},\qquad k=0,1,2,\ldots$$

für jedes $k\ (=0,1,2,\ldots)$ sowohl $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$, wie $F(u,t)$ gleich Null macht, so daß alle in Abb. 3 dargestellten Kurven eine unendliche Reihe von (gemeinsamen) Doppelpunkten besitzen.

Ob ein solcher Doppelpunkt ein reeller Doppelpunkt, eine Spitze oder ein isolierter Punkt ist, wird bekanntlich durch das folgende Kriterium entschieden:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial t}-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\gtreqless 0 \text{ reeller Doppelpunkt, Spitze, isolierter Punkt,}$$

welches in unserem Fall — wenn noch zur Abkürzung

$$\frac{(2k+1)\pi}{2}=z$$

gesetzt wird — die Form annimmt:

$$1+(-1)^k 4z-3z^2+\frac{2}{3}z^4-4p^2q^2z^6\gtreqless 0 \text{ reeller Doppelpunkt, Spitze, isolierter Punkt,}$$

oder aber:

$$p^2q^2\lesseqgtr\frac{1+(-1)^k 4z-3z^2+\frac{2}{3}z^4}{4z^6}\quad\text{reeller Doppelpunkt, Spitze, isolierter Punkt}\quad\ldots\quad(11).$$

Der Grenzwert von pq berechnet sich somit für den ersten Doppelpunkt $(k=0)$ aus

$$p^2q^2=\frac{1+2\pi-\frac{3}{4}\pi^2+\frac{1}{24}\pi^4}{\frac{\pi^6}{16}}=\frac{\frac{96}{\pi^4}+\frac{192}{\pi^3}-\frac{72}{\pi^2}+4}{6\pi^2}\quad\ldots\ldots\quad(12),$$

was zu dem obenerwähnten Betrage

$$pq=\sqrt{\frac{3,88}{6\pi^2}}=0,256\quad\ldots\ldots\quad(13)$$

führt.

Für $k=1$ folgt aus (11) als Grenzwert

$$(p\,q)_1 = \sqrt{\frac{0{,}3298}{6\,\pi^2}} = 0{,}0753,$$

während für alle folgenden k-Werte mit großer Annäherung als Grenzwert

$$(p\,q)_k = \sqrt{\frac{4}{6\,(2\,k+1)^2\,\pi^2}}$$

gesetzt werden kann.

Ist $(p\,q)_{k+1} < p\,q < (p\,q)_k$, so hat die $(t\,u)$-Kurve $(k+1)$ „Schleifen".

Bis jetzt haben wir uns noch stets auf den Fall eines symmetrischen Deformationszustandes des Stabes beschränkt. Es ist aber auch eine unsymmetrische Ausbiegung möglich, und zwar dann, wenn die Kraft Q die „zweite" Knickkraft des (geraden gedachten) Stabes übersteigt. Es wäre dies natürlich dadurch nachzurechnen, daß man für jede Stabhälfte die Gleichung der elastischen Linie aufstellt und unter Verzicht auf die Symmetriebedingung den glatten Verlauf sowohl der Durchbiegung selbst als ihre Ableitung im Punkte $x=0$ fordert.

Ein weit anschaulicheres Bild des hier gemeinten Vorganges erhält man aber, wenn man bedenkt, daß man in dem Augenblick, in dem die Kraft Q gleich der zweiten Eulerschen Knickkraft wird, der bereits vorhandenen Durchbiegung eine andere, aus zwei Wellen bestehende sinusförmige Durchbiegung superponieren kann, ohne daß für deren Ausbildung eine Vergrößerung der Kraft Q erforderlich wäre. Es tritt also von diesem Augenblicke an eine weitere, jedoch unsymmetrische Deformation des Stabes bei konstantem $\mu^2\,l^2=\pi^2$ ein. (Vgl. etwa den Fall $p\,q=\sqrt{\frac{1}{12\,\pi^2}}$ der Abb. 3, wo der gestrichelte Teil der Schleife durch die Vertikale $\mu^2\,l^2=\pi^2$ ersetzt werden muß.)

3. Zweite Methode. In der vorangehenden Ziffer wurde gezeigt, daß die Eulerschen Knickkräfte des gerade gedachten Stabes eine wichtige Rolle beim Durchschlagproblem spielen. Die folgende Behandlung des Problems zeigt die Bedeutung dieser Kräfte noch von einer anderen Seite.

Ausgangspunkt ist wiederum Gl. **2** (2), welche jetzt mit

$$\frac{P\,l}{E\,I} - \frac{1}{R} = a_0, \qquad \frac{P}{E\,I} = a_1$$

in der Form

$$y'' + \mu^2\,y = a_0 - a_1\,x, \qquad (0 \leqq x \leqq l) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

geschrieben werden kann.

Die Gleichung hat nur für das Intervall $0 \leqq x \leqq l$ mechanische Bedeutung und muß für das Intervall $-l \leqq x \leqq 0$ durch

$$y'' + \mu^2\,y = a_0 + a_1\,x, \qquad -l \leqq x \leqq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ersetzt werden.

Entwickelt man die Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1\,x, \qquad -l \leqq x \leqq 0,$$
$$f(x) = a_0 - a_1\,x, \qquad 0 \leqq x \leqq l$$

im Intervall $-l \leqq x \leqq l$ in eine Fourierreihe

$$f(x) = b_1 \cos\frac{\pi\,x}{2\,l} + b_3 \cos\frac{3\,\pi\,x}{2\,l} + \ldots\, b_{2k+1} \cos\frac{(2\,k+1)\,x}{2\,l},$$

so findet man für die Beiwerte b_{2k+1}

$$b_{2k+1} = \frac{(-1)^k\,4\,(a_0 - a_1\,l)}{(2\,k+1)\,\pi} + \frac{8\,a_1\,l}{(2\,k+1)^2\,\pi^2} = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 4}{(2\,k+1)\,\pi\,R} + \frac{8\,P\,l}{(2\,k+1)^2\,\pi^2\,E\,I} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

so daß die Gl. (1) und (2) durch Gl. (4)

$$\left.\begin{aligned} y'' + \mu^2\,y &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \cos\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,l}\,x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^{k+1}\,\frac{4}{(2\,k+1)\,\pi\,R} + \frac{8\,P\,l}{(2\,k+1)^2\,\pi^2\,E\,I}\right] \cos\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,l}\,x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ersetzt werden können.

Setzt man

$$\mu^2 = \nu^2 \frac{\pi^2}{4\, l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

(so daß $\nu^2 = \frac{4\,\mu^2\, l^2}{\pi^2} = \frac{4\, Q\, l^2}{\pi^2\, E\, I}$ das Verhältnis der Stützkraft Q zur ersten Eulerschen Knickkraft Q_E darstellt), so ist ihre Lösung

$$y = C_1 \cos\mu\, x + C_2 \sin\mu\, x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\, l^2}{\pi^2} \frac{b_{2k+1}}{[\nu^2 - (2k+1)^2]} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2\, l}\, x \quad \ldots \ldots (6),$$

solange wenigstens μ von den Zahlen $\frac{(2k+1)\pi}{2\, l}$ verschieden ist.

Beschränken wir uns zunächst auf diesen Fall, so führen die Bedingungen, daß y für $x = \pm\, l$ gleich Null sein soll, zu den Bedingungsgleichungen

$$C_1 \cos\mu\, l + C_2 \sin\mu\, l = 0, \qquad C_1 \cos\mu\, l - C_2 \sin\mu\, l = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (7),$$

aus welcher — wenn nur $\cos\mu\, l \sin\mu\, l \neq 0$ ist —

$$C_1 = C_2 = 0$$

folgt. Es gilt also

$$y = \frac{4\, l^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{\nu^2 - (2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2\, l}\, x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Der Betrag, um welchen sich die Bogenlänge der gebogenen Stabachse von der Sehnenlänge $2\, l$ unterscheidet, läßt sich auf zwei verschiedene Weisen bestimmen: das eine Mal direkt aus (8), indem man

$$\int_{-l}^{+l} \frac{1}{2}\, y'^2\, d\, x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

berechnet, das andere Mal indirekt, indem man das durch Gl. **2** (1) definierte Integral

$$\int_{-l}^{+l} \frac{1}{2}\, y_0'^2\, d\, x$$

um $\frac{2\, Q\, l}{E\, F}$ verringert.

Macht man davon Gebrauch, daß wegen der Orthogonalität der Funktionen $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\, l}\, x$ das Integral (9) für alle in der rechten Seite von (8) stehenden Glieder gesondert bestimmt werden kann, so findet man nach einer kurzen Zwischenrechnung die das ganze Problem beherrschende Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{3} \frac{l^3}{R^2} - \frac{2\, Q\, l}{E\, F} = \frac{2\, l^3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} \frac{4}{\pi\, R} + \frac{8\, P\, l}{\pi^2\, E\, I\, (2k+1)}}{\nu^2 - (2k+1)^2} \right]^2 \quad \ldots \ldots (10),$$

welche den Zusammenhang zwischen P und Q liefert und also mit Gl. **2** (8) gleichwertig ist.

Es fragt sich jetzt, inwiefern die erhaltenen Resultate sich ändern, wenn entweder

$$\cos\mu\, l = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sin\mu\, l = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

ist. Wir betrachten zunächst den ersten Ausnahmefall uud nehmen an, es sei

$$\mu = \frac{(2j+1)\pi}{2\, l},$$

dann wird die Lösung von Gl. (4)

$$\left.\begin{aligned} y = C_1 \cos\frac{(2j+1)\pi}{2\, l}\, x + C_2 \sin\frac{(2j+1)\pi}{2\, l}\, x + \frac{4\, l^2}{\pi^2} {\sum_{k=0}^{\infty}}' \frac{b_{2k+1}}{\nu^2 - (2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2\, l}\, x \\ + \frac{l\, b_{2j+1}}{\pi} \frac{x \sin\frac{(2j+1)\pi}{2\, l}\, x}{2j+1} \end{aligned}\right\} \quad . \; (12),$$

wobei das in dem Σ-Zeichen geschriebene j bedeutet, daß bei der Summation das j-te Glied unterdrückt werden soll.

Die Randbedingungen, nach welchen $y=0$ für $x=\pm l$ ist, lauten jetzt:

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cos\frac{(2j+1)\pi}{2} + C_2 \sin\frac{(2j+1)\pi}{2} + \frac{l^2 b_{2j+1}}{\pi(2j+1)} \sin\frac{(2j+1)\pi}{2} = 0 \\ C_1 \cos\frac{(2j+1)\pi}{2} - C_2 \sin\frac{(2j+1)\pi}{2} + \frac{l^2 b_{2j+1}}{\pi(2j+1)} \sin\frac{(2j+1)\pi}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (13).$$

Solange b_{2j+1} verschieden von Null ist, stehen diese Gleichungen zueinander in Widerspruch. Der Fall

$$\mu = \frac{(2j+1)\pi}{2l} \quad \text{oder} \quad Q = (2j+1)^2 Q_E$$

(vgl. die zu Formel (5) gemachte Bemerkung) kann also nur dann eintreten, wenn $b_{2j+1}=0$ ist, d. h. wenn P den aus

$$\frac{4\cdot(-1)^{j+1}}{(2j+1)\pi R} + \frac{8Pl}{(2j+1)^2\pi^2 EI} = 0$$

hervorgehenden Wert

$$P = \frac{(-1)^j (2j+1)\pi EI}{2Rl} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

hat. In diesem Falle folgt aus den Gl. (13), daß $C_2=0$, dagegen C_1 unbestimmt ist, und (12) geht somit über in:

$$y = C_1 \cos\frac{(2j+1)\pi}{2l}x + \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{b_{2k+1}}{\nu^2-(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x \quad . \; . \; . \; . \; (15).$$

Berechnet man jetzt wieder auf zwei verschiedene Weisen die Länge der gebogenen Stabachse, so erhält man an Stelle der Gl. (10):

$$\frac{1}{3}\frac{l^3}{R^2} - \frac{2Ql}{EF} = \frac{2l^3}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \left[\frac{(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi R} + \frac{8Pl}{\pi^2 EI(2k+1)}}{\nu^2-(2k+1)^2}\right]^2 + \frac{\pi^2(2j+1)^2}{8l}C_1^2 \quad . \; . \; . \; (16),$$

so daß sich die unbestimmt gebliebene Konstante C_1 zu:

$$C_1^2 = \frac{8l}{\pi^2(2j+1)^2}\left[\frac{l^3}{3R^2} - \frac{2Ql}{EF}\right] - \frac{16 l^4}{\pi^4(2j+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \left[\frac{(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi R} + \frac{8Pl}{\pi^2 EI(2k+1)}}{\nu^2-(2k+1)^2}\right]^2 \quad (17)$$

berechnet.

In dieser Gleichung ist ν durch $2j+1$ und P durch seinen Wert (14) zu ersetzen. Ferner läßt sich auf Grund von früher gemachten Festsetzungen das Glied:

$$\frac{2Ql}{EF} \quad \text{noch in} \quad \frac{2\mu^2 EIl}{EF} = \frac{\nu^2\pi^2 i^2}{2l} = \frac{(2j+1)^2\pi^2 p^2 q^2}{2}\frac{l^3}{R^2}$$

umschreiben (siehe Gl. (5), sowie **2** (7)). Hierdurch geht (17) über in:

$$C_1^2 = \frac{8}{\pi^2(2j+1)^2}\left[\frac{1}{3} - \frac{(2j+1)^2\pi^2 p^2 q^2}{2}\right]\frac{l^4}{R^2} - \frac{16}{\pi^4(2j+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \left[\frac{(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi} + (-1)^j\frac{2j+1}{2k+1}\frac{4}{\pi}}{(2j+1)^2-(2k+1)^2}\right]^2\frac{l^4}{R^2},$$

$$C_1^2 = \frac{8}{\pi^2(2j+1)^2}\left\{\frac{1}{3} - \frac{(2j+1)^2\pi^2 p^2 q^2}{2} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \left[\frac{(-1)^{k+1} + (-1)^j\frac{2j+1}{2k+1}}{(2j+1)^2-(2k+1)^2}\right]^2\right\}\frac{l^4}{R^2} \quad . \; . \; . \; (18).$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß es im allgemeinen zwei verschiedene Lösungen für C_1 gibt, so daß zu der Belastung

$$Q = (2j+1)^2 Q_E \quad (Q_E = \text{erste Eulersche Knickkraft}), \qquad P = \frac{(-1)^j(2j+1)\pi EI}{2Rl} \quad . \; (19)$$

zwei voneinander verschiedene Durchbiegungen des Stabes gehören. Der Wertsatz (19) markiert also in dem in Abb. 3 entworfenen $(t, \mu^2 l^2)$-Diagramm eine Reihe von Doppelpunkten $t = (-1)^j(2j+1)\frac{\pi}{2}$, $\mu^2 l^2 = \frac{\pi^2}{4}(2j+1)^2$, welche für alle möglichen Stäbe die gleichen sind.

Ob ein solcher Doppelpunkt einen isolierten Punkt oder einen reellen Doppelpunkt darstellt, hängt von den Stababmessungen ab und wird dadurch entschieden, ob die aus (18) folgenden C_1-Werte — und damit die von ihnen definierten Durchbiegungen (15) — imaginär oder reell sind. Der Grenzwert des Parameters $(p\,q)$, für welchen die Belastung (19) von einem Stabe reell erreicht werden kann, berechnet sich somit aus:

$$p^2 q^2 = \frac{2}{3\,(2j+1)^2\,\pi^2} - \frac{64}{(2j+1)^2\,\pi^6} \sum_{k=0}^{\infty}{}_j \left[\frac{(-1)^{k+1} + (-1)^j \dfrac{2j+1}{2k+1}}{(2j+1)^2 - (2k+1)^2} \right]^2 .$$

Für die Fälle $j=0$ und $j=1$ findet man z. B.:

$$p^2 q^2 = 0{,}0655 \quad \text{und} \quad p^2 q^2 = 0{,}005571,$$

was in Übereinstimmung mit den aus Gl. **2** (11) berechneten Werten steht [siehe z. B. **2** (13)][4]).

Es lohnt sich, die bisher erhaltenen Resultate noch einmal einer näheren Diskussion zu unterwerfen, und wir stellen dabei zuerst fest, daß das rechte Glied der Gl. (1) [bzw. (2)] diejenige Stabkrümmung darstellt, welche bei dem frei gelagerten Stab auftreten würde. Wir nennen sie die statisch bestimmte Krümmung. Sie besteht aus zwei Teilen: der erste rührt von der anfänglichen Krümmung des unbelasteten Stabes her, der zweite von der Belastung P.

Diese Krümmung wurde in eine Fourierreihe entwickelt, in welcher jedes Glied die Krümmung einer zum geraden Stab gehörigen Eigendeformation darstellte. Eine jede solche Krümmung kann durch eine zu der Eigendurchbiegung proportionale „Eigenbelastung" aufrecht erhalten werden. Würde man alle diese Eigenbelastungen bestimmen, so wäre ihre Summe natürlich mit der Kraft P identisch. Es ist nun einfach, die von den Druckkräften Q verursachte zusätzliche Verformung des Stabes zu verfolgen, wenn wir sie als Summe unendlich vieler Teilverformungen auffassen, welche je von einer der erwähnten Einzelbeträge der statisch bestimmten Krümmung bedingt sind. Denn greifen an einem einer Eigenbelastung unterworfenen und also nach der korrespondierenden Eigendurchbiegung deformierten Stab zwei in seinen Enden axial wirkende Druckkräfte Q an, so wird die vorhandene Deformation in einem bestimmten Verhältnis vergrößert, welches bekanntlich nach unendlich geht, wenn die Kräfte Q sich der von der betrachteten Eigendurchbiegung definierten Knickkraft nähern.

In Übereinstimmung hiermit liefert Gl. (8) die Gesamtdurchbiegung y als Summe der mit bestimmten Beiwerten versehenen Eigendurchbiegungen des Stabes.

Um das Entstehen der in Abb. 3 auftretenden Doppelpunkte zu erklären, denken wir den Stab einen Augenblick freigemacht und fragen uns, ob es ein System von Kräften P, Q gibt, bei dem Q den Wert einer Eulerschen Knickkraft hat und die Durchbiegung des Stabes trotzdem endlich bleiben kann. Die Antwort lautet, daß die soeben definierte statisch bestimmte Krümmung die zur Knickkraft Q gehörige Eigenfunktion in einem solchen Falle nicht enthalten darf, denn ein nach dieser Eigenfunktion gekrümmter Stab würde durch die zu ihr gehörige Knickkraft Q eine über alle Grenzen wachsende Deformation erleiden. Es muß also P einen ganz bestimmten Wert annehmen, und zwar denjenigen, welcher in der statisch bestimmten Krümmung den Beiwert der zu dem betrachteten Q gehörigen Eigenfunktion zu Null macht [vgl. das Ergebnis der Gl. (19)]. Unter der Wirkung dieser Kraft Q und der ihr zugeordneten Kraft P wird nun der immer noch frei gedachte Stab im allgemeinen nicht zwischen die beiden Gelenke passen. Es bietet sich jedoch mitunter eine Möglichkeit, dies zu bewerkstelligen, ohne daß sich hierbei die Kräfte P und Q ändern. Man sieht nämlich leicht ein, daß der Stab, welcher unter der Wirkung von P und deren Reaktionen die zu Q gehörige Eigendurchbiegung nicht enthält, sich unter der Wirkung der Kräfte P und Q insofern wie ein gerader Stab benimmt, daß er sich im indifferenten Gleichgewicht befindet, so daß sich seiner Durchbiegung ein beliebiges Vielfach der zu Q gehörigen Eigendurchbiegung überlagern kann.

Mit einer solchen Überlagerung ist unter allen Umständen eine Abstandsverkleinerung der beiden Stabenden verbunden. War dieser Abstand also anfänglich zu groß, so kann dem Stab unter Aufrechterhaltung des betrachteten Kraftsystems P, Q trotzdem die verlangte Sehnenlänge erteilt werden. In dem entgegengesetzten Fall ist dies unmöglich und kann die betrachtete Eulersche Knickkraft in den Gelenken nicht erzeugt werden. Jetzt versteht man auch, daß im ersten Falle im $(P\,Q)$-Diagramm ein reeller Doppelpunkt entsteht. Denn wenn die vorgeschriebene Sehnenlänge durch Überlagerung von z. B. C_1 mal der zu Q gehörigen Eigendurchbiegung erhalten werden kann, so ist es klar, daß dasselbe Ergebnis auch durch Überlagerung von $-C_1$ mal diese Eigendurchbiegung zustande kommt. [Vgl. Gl. (18), welche

[4]) Die hier erwähnten Werte sind einfach durch Berechnung einer genügend großen Anzahl von Gliedern der für $p^2 q^2$ erhaltenen Reihe bestimmt worden. Man kann aber ganz allgemein zeigen, da die hier erhaltenen Resultate — wie es sein muß — in Übereinstimmung mit den in Ziffer 2 erhaltenen stehen.

in der Tat zwei entgegengesetzte Werte für C_1 liefert.] Hiermit ist der erste Fall (11) vollständig erledigt.

Es bleibt also nur noch der zweite Fall

$$\sin \mu l = 0\,, \qquad \left(\mu = \frac{m\pi}{l}\,,\ \nu^2 = \frac{4\,l^2}{\pi^2}\,\mu^2 = 4\,m^2\right), \qquad (m = 1, 2 \ldots)$$

übrig, wobei der Wert von Q mit der 2ten, 4ten ... Knickkraft übereinstimmt. Aus den Gl. (7) folgt jetzt, daß C_1 gleich Null und C_2 unbestimmt ist, so daß Gl. (6) in

$$y = C_2 \sin \frac{m\pi}{l}\,x + \frac{4\,l^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}}{4\,m^2 - (2\,k+1)^2} \cos \frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,l}\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

übergeht, wobei die b_{2k+1} wiederum durch (3) definiert sind. Die Formänderungsbedingung, welche im Falle $\cos \mu l = 0$ zu Gl. (16) führte, lautet hier:

$$\frac{1}{3}\,\frac{l^3}{R^2} - \frac{2\,Q\,l}{E\,F} = \frac{2\,l^3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1}\,\dfrac{4}{\pi R} + \dfrac{8\,P\,l}{\pi^2\,E\,I\,(2\,k+1)}}{4\,m^2 - (2\,k+1)^2}\right]^2 + \frac{m^2\,\pi^2\,C_2{}^2}{2\,l} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

oder, umgeschrieben in der auch früher benutzten Bezeichnung [vgl. **2** (7)]

$$C_2{}^2 = \frac{2}{\pi^2\,m^2} \left\{\frac{1}{3} - 2\,\pi^2\,m^2\,p^2\,q^2 - \frac{32}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1} + \dfrac{2\,t}{\pi\,(2\,k+1)}}{4\,m^2 - (2\,k+1)^2}\right]^2\right\} \frac{l^4}{R^2} \quad . \quad . \quad (22).$$

Wir diskutieren diese Gleichung nur noch für den Fall $m = 1$ ($Q =$ der zweiten Eulerschen Knickkraft) und schreiben sie in der Form:

$$C_2{}^2 = \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{1}{3} - 2\,\pi^2\,p^2\,q^2 - \frac{32 \cdot 0{,}11111}{\pi^4} + \frac{128 \cdot 0{,}09817}{\pi^5}\,t - \frac{128 \cdot 0{,}11565}{\pi^6}\,t^2\right] \frac{l^4}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

in welcher die Zahlenwerte 0,11111, 0,09817, 0,11565 durch Summation einer genügend großen Anzahl der in (22) vorkommenden Reihenglieder erhalten worden sind.

Zunächst entnimmt man der Gl. (23), daß es Werte $(p\,q)$ gibt, für welche das rechte Glied dauernd negativ ist, so daß für diese Stäbe die zweite Eulersche Knickkraft nicht erreicht werden kann. Die zugehörigen Abbildungskurven $(t, \mu^2\,l^2)$ dieser Stäbe liegen links von der Geraden $\mu^2\,l^2 = \pi^2$. Der Grenzwert $(p\,q)$ berechnet sich aus der Bedingung, daß die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{3} - 2\,\pi^2\,p^2\,q^2 - \frac{32 \cdot 0{,}11111}{\pi^4} + \frac{128 \cdot 0{,}09817}{\pi^5}\,t - \frac{128 \cdot 0{,}11565}{\pi^6}\,t^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

zwei gleiche Wurzeln hat. Denselben Wert erhält man natürlich aus Gl. (10), wenn man hierin $\mu\,l = \pi$ setzt und die Forderung stellt, daß diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln aufweist.

Ist $p\,q$ kleiner als dieser Grenzwert, so daß die zugehörige $(t, \mu^2\,l^2)$ Schleife die Gerade in zwei Punkten t_1 und t_2 $(t_1 > t_2)$ schneidet, so ist für alle Werte $t_2 < t < t_1$ ein Gleichgewichtszustand des Stabes möglich, bei welchem sich die zweite Eigendurchbiegung des Stabes C_2 mal ausbildet. Gl. (23) lehrt, wie groß das zu jedem t-Wert $(t_2 < t < t_1)$ gehörige C_2 ist. Daß zu jedem Wert zwei C_2 Werte gehören, hat in diesem Fall keine besondere Bedeutung, weil die ihnen zugeordneten Durchbiegungen in bezug auf die vertikale Mittellinie spiegelbildlich sind und sich mechanisch nicht unterscheiden.

4. Die zu einem Sonderfalle gehörigen Diagramme. Wie unerwartet kompliziert die Verhältnisse sind, welche sich bei unserer an und für sich einfachen Aufgabe auftun, zeigen wir an Hand einiger Diagramme, welche sich auf den willkürlich ausgewählten Sonderfall $6\,p^2\,q^2 = 0{,}020264$ beziehen. Bezeichnet man das Verhältnis $y:f$ der Stabmitte mit η, so kommen zur Nachprüfung der verschiedenen möglichen Gleichgewichtszustände vor allem die drei Diagramme in Betracht, welche den Zusammenhang zwischen je zwei der drei Größen P, Q und η darstellen. Sie sind in den Abb. 5 bis 7 wiedergegeben, wobei statt P und Q jedesmal die dimensionslosen Größen $P\,R\,l/E\,I$ und $\sqrt{Q\,l^2/E\,I}$ benutzt wurden. Außerdem ist in Abb. 8 die mit der im Stabe aufgespeicherten Formänderungsenergie $\mathfrak{A}$ proportionale und dimensionslose Größe $l^2\,\mathfrak{A}/2\,R\,E\,I$ in ihrer Abhängigkeit von η aufgezeichnet.

Einige beim Durchschlagvorgang wichtige Zwischenlagen sind in sämtlichen Figuren mit I ... XVII numeriert worden. Zwecks ihrer Erläuterung stellen wir zunächst fest, daß das „Durchschlagen“ des Stabes — bei dem wir uns nach wie vor die Symmetrie der elastischen Linie gewährleistet denken müssen — in dreierlei Weisen erzeugt werden kann. Erstens kann man den Stab mit einem Gewicht belasten, zweitens kann man ihn mit einer Druckschraube nach unten drücken (so daß er zwar nach oben, aber nicht nach unten gestützt ist), drittens kann man die Stabmitte zwangsläufig führen, so daß in jedem Belastungszustand weder eine Bewegung dieses Stabpunktes nach oben noch nach unten möglich ist.

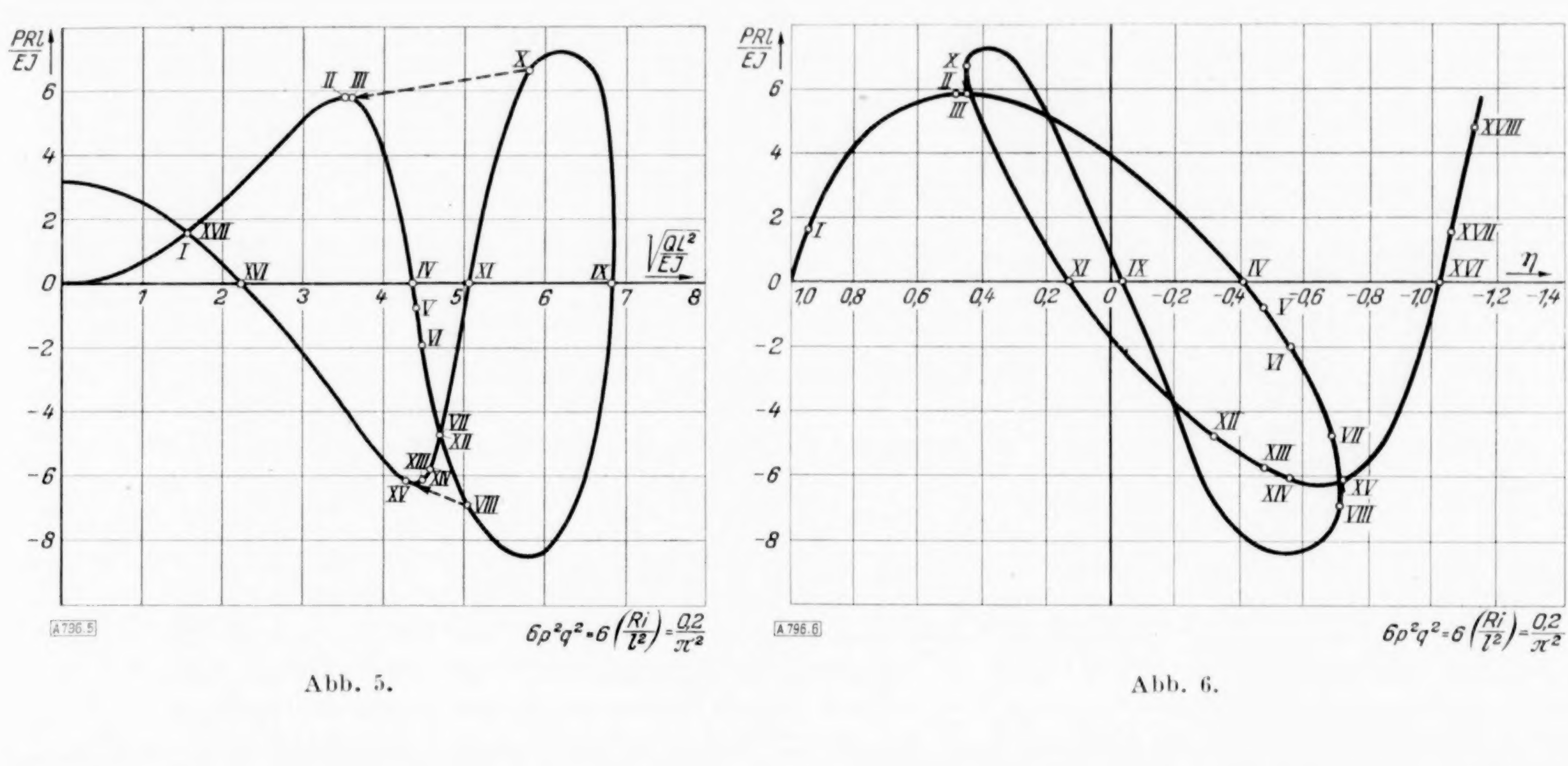


Abb. 5. Abb. 6.

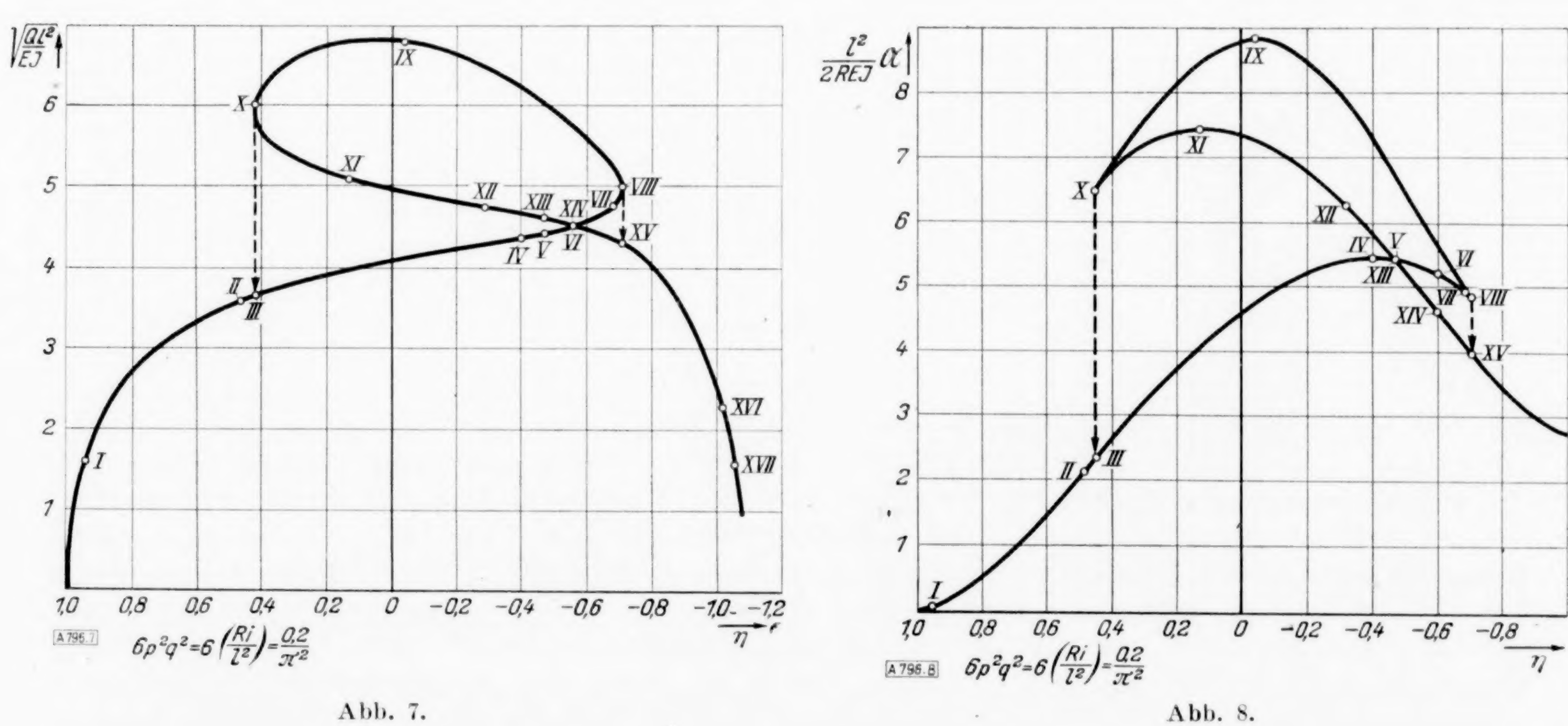


Abb. 7. Abb. 8.

Im ersten Falle schlägt der Stab im Zustand II, im zweiten Fall im Zustand IV durch (siehe Abb. 6). Im dritten Falle findet, wenn man vom Anfangszustand aus die Senkung der Stabmitte zwangsläufig vergrößert, ein Durchschlagen von Zustand VIII nach Zustand XV statt. Führt man die Stabmitte — nachdem dieses Durchschlagen einmal stattgefunden hat — wiederum zwangsläufig in die Höhe, so werden die Zustände XV, XIV, XIII, XII, XI, X durchlaufen, und von hier aus schlägt der Stab in Zustand III über, wie man am einfachsten aus Abb. 8 (oder auch aus Abb. 7) erkennt. Übrigens zeigt die Abb. 8, daß bei der Zwangsführung der Stabmitte die Möglichkeit eines Durchschlagens in allen Punkten der Strecke V, VI, VII, VIII insofern vorhanden ist, daß mit jedem der von ihnen dargestellten Gleichgewichtszustände ein anderer korrespondiert, für welchen — bei gleicher Höhe des Stabmittelpunktes — die Formänderungsenergie kleiner ist (siehe die Strecke XIII, XIV, XV). Ob der

Stab wirklich aus eigener Bewegung in einer solchen Lage durchschlägt, könnte streng genommen nur durch Energiebetrachtungen entschieden werden. Eine ähnliche Bemerkung gilt, wenn man den Stab von Zustand XVII zurückführt, für die Strecke XIII, XII, X.

Die Zustände IV, IX, XI und XVI kennzeichnen sich durch die Abwesenheit einer belastenden äußeren Kraft. Da die Arbeit durch $\int P\,d\,y$ definiert ist, sieht man leicht, daß in diesen Lagen $d\mathfrak{A}/d\,y$ (oder auch $d\mathfrak{A}/d\,\eta$) gleich Null ist, so daß $\mathfrak{A}$ selbst ein Maximum oder Minimum aufweist.

Die mechanische Bedeutung der Doppelpunkte (I, XVII) und (VII, XII) der Abb. 5 wurde bereits in der vorigen Ziffer klargestellt, so daß wir auf sie nicht zurückzukommen brauchen. Es bleibt also nur noch der Doppelpunkt (VI, XIV) der Abb. 7 zu besprechen übrig. Stellt man sich zunächst die Frage, ob überhaupt Doppelpunkte im $(\sqrt{Q\,l^2/E\,I}, \eta)$-Diagramm zu erwarten sind, so sieht man leicht, daß solche wiederum nur bei gewissen Knickkräften des Stabes auftreten können. Bezeichnet man mit (P_1, Q_0, η_0), (P_2, Q_0, η_0) die beiden für die Doppellagen des Stabes charakteristischen Größen, so kann man zur Erzeugung dieser Doppellagen — unter Lösung der beiden Scharniere — zunächst durch eine vertikale Belastung $2\,S$ in der Stabmitte und vertikale Kräfte S in den beiden Scharnieren erreichen, daß die Stabmitte die mit η_0 übereinstimmende Verschiebung erleidet.

Die Stabenden haben dann im allgemeinen nicht den vorgeschriebenen Abstand $2\,l$, und es ist — wenn ihr Abstand zu groß ist — die Aufgabe der Druckkräfte Q_0, ihren Abstand auf $2\,l$ zu reduzieren. Es steht von vornherein fest, daß mit den Kräften Q_0 zugleich vertikale Kräfte ins Spiel kommen; denn denkt man sich den Stab in der Mitte eingeklemmt, so dürfen die Endpunkte sich nicht vertikal verschieben. Wenn nun die Kräfte Q_0 in zweierlei Weise die verlangte Abstandsverkürzung beider Stabenden zustande bringen sollen, so muß Q_0 notwendigerweise eine solche Knickkraft sein, bei welcher die Stabenden in bezug auf die Stabmitte keine Vertikalverschiebung erleiden. Wir nennen diese Kräfte der Kürze wegen Knickkräfte zweiter Art und ihre zugehörigen Biegelinien dementsprechend Eigendurchbiegungen zweiter Art. Ohne auf alle Einzelheiten des Vorganges genau einzugehen, stellen wir nun noch folgendes fest:

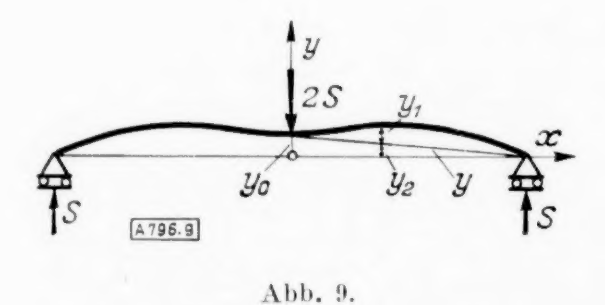


Abb. 9.

Die von den Kräften S verursachte „statisch bestimmte“ Durchbiegung y des Stabes (vgl. Abb. 9) kann als Summe der linear verlaufenden Durchbiegung y_2 und der nach den Eigendurchbiegungen zweiter Art zu entwickelnden Durchbiegung y_1 aufgefaßt werden. Es ist klar, daß die Durchbiegung y_1 die k-te Eigendurchbiegung zweiter Art nicht enthalten darf, wenn die horizontalen Druckkräfte den Wert der k-ten Knickkraft zweiter Art erreichen; denn sonst würde beim Auftreten dieser Kräfte die statische Durchbiegung ins Unendliche vergrößert. Hierdurch wird die Größe der Kräfte S eindeutig bestimmt. Greifen nun bei dieser Belastung S die k-ten Knickkräfte zweiter Art an, so kann sich der statischen Durchbiegung ein beliebiges Vielfach der k-ten Durchbiegung zweiter Art überlagern, so daß der Abstand der Endpunkte des Stabes auf die vorgeschriebene Länge $2\,l$ verkleinert werden kann. (Wenn der Abstand dieser Punkte anfänglich zu klein war, kann die k-te Knickkraft zweiter Art — und damit der betreffende Doppelpunkt — überhaupt nicht auftreten.)

Dieser vorgeschriebene Abstand kann offensichtlich durch eine Superposition sowohl eines positiven wie eines gleich großen negativen Vielfaches dieser Eigendurchbiegung erzielt werden, und hiermit ist bewiesen, daß, wenn die horizontalen Kräfte wirklich den Wert einer Knickkraft zweiter Art erreichen, auch wirklich ein Doppelpunkt im $(\sqrt{Q\,l^2/E\,I}, \eta)$-Diagramm entstehen muß. Die Vertikalkräfte S' und $2\,S'$, welche beim Auftreten der k-ten Eigendurchbiegung in den Endpunkten und in der Stabmitte entstehen, haben in den beiden möglichen Fällen verschiedenes Vorzeichen, so daß die belastenden Kräfte $2\,P = 2\,S + 2\,S'$ in beiden Fällen verschieden sind. Hiermit erklärt sich auch, daß mit den Doppelpunkten von Abb. 7 keine Doppelpunkte in Abb. 5 übereinstimmen.

Zur Gasdynamik des drehenden Schaufelsterns.

Von *A. Busemann* in Braunschweig.

Einleitung. Die radialen Pumpen und Turbinen lassen sich in gewissen Fällen als eine ebene Flüssigkeitsströmung um einen drehenden Schaufelstern behandeln, wobei die Fördermenge im Inneren des Schaufelsternes von einer Quelle ausströmt oder von einer Senke verschluckt wird. Die konforme Abbildung läßt sich hierbei nicht so einfach anwenden wie bei der Umströmung geradlinig bewegter Körper, weil eine stationäre Strömung um die Schaufelquerschnitte nur in einem mitdrehenden Koordinatensystem besteht, für das die Flüssigkeit eine relative Drehung besitzt. Im ruhenden Koordinatensystem ist zwar das Geschwindigkeitsfeld außerhalb der Singularitäten quell- und drehungsfrei, aber es läuft darin der Schaufelstern um. Durch Anwendung geeigneter Anordnungen von Quellen, Senken und Wirbeln innerhalb der Schaufelquerschnitte gelingt es jedoch eine Strömung zu finden, die den drehenden Schaufelumriß nicht durchströmt. Aus den Kraftwirkungen der Strömung an diesen Singularitäten im Innern der Schaufeln ergibt sich dann das Drehmoment.

Bei Gebläsen mit hohen Umfangsgeschwindigkeiten müßten dieselben Überlegungen mit den Erweiterungen durchgeführt werden, die eine zusammendrückbare Gasströmung erfordert. Man erhält zwar entsprechende Kraftgesetze für Quellen, Senken und Wirbeln, doch werden die Verhältnisse bedeutend unangenehmer, weil sich die Wirbelfreiheit in den regulären Bereichen der Strömung auf das Geschwindigkeitsfeld bezieht, während die Quellfreiheit überhaupt nur in stationären Strömungen besteht und sich außerdem auf das Feld der Stromdichte, d. h. des Produktes aus Geschwindigkeit und Gasdichte, bezieht. Hierdurch wird es zunächst unmöglich, zwei quell- und wirbelfreie Felder zu einem neuen quell- und wirbelfreien Feld zu überlagern, außerdem kann man in der Gasströmung nur mit verteilten Singularitäten arbeiten, weil ein gewisses Gebiet um Einzelquellen und Einzelwirbel für das Geschwindigkeitsfeld ausfällt. Aus diesen Gründen haben die Kraftgesetze an Singularitäten in der Gasdynamik nur einen sehr beschränkten Anwendungsbereich.

Bekanntlich haben die Geschwindigkeitsfelder von Flüssigkeitsströmungen und die magnetischen Kraftfelder eine Gleichartigkeit in bezug auf die Verteilung des Vektors und der Feldenergie. Danach müßte man erwarten, daß die an entsprechenden Singularitäten auftretenden Kräfte gleich wären, damit eine Verschiebung der Singularitäten diejenige Arbeit verursacht, die für die damit verbundene Änderung der Feldenergie erforderlich ist. Entgegen dieser Erwartung unterscheiden sich die hydrodynamischen und magnetischen Kräfte stets durch das Vorzeichen. Hierdurch kommt es, daß zwar die Kräfte an magnetischen Quellen und Senken (Nord- und Südpolen) sowie an hydrodynamischen Wirbeln so geartet sind, daß ihre Verschiebungsarbeit die Feldenergie deckt. Dagegen würde bei der Verschiebung hydrodynamischer Quellen und Senken sowie magnetischer Wirbel (eines von einem elektrischen Strom durchflossenen Leiters) gerade das umgekehrte Vorzeichen der Verschiebungsarbeit für die Deckung der Feldenergie erforderlich sein. Dieser Unterschied wird bekanntlich beim magnetischen Wirbel nach dem Faradayschen Induktionsgesetz dadurch ausgeglichen, daß sich dem in der Wirbelachse fließenden elektrischen Strom während der Verschiebung induzierte elektromotorische Kräfte entgegenstellen, deren Überwindung eine Zufuhr elektrischer Energie erfordert. Ebenso muß auch bei der Verschiebung der hydrodynamischen Quellen und Senken eine zusätzliche Energiezufuhr stattfinden, die in diesem Falle durch Überdrücke am Orte der Quellen und Unterdrücke am Orte der Senken gegenüber den Drücken der stationären Strömung verursacht wird. Diese Druckdifferenzen sind es gerade, die bei Kreiselradmaschinen die Förderhöhe oder das Gefälle ausmachen.

(Bei ebenen Strömungen kann man statt des Feldes der Stromlinien auch das Feld der Potentiallinien betrachten, die senkrecht zu den Stromlinien verlaufen. Bei Flüssigkeitsströmungen ist auch dieses in regulären Bereichen quell- und wirbelfrei, doch vertauschen sich Quellen und Wirbel, denn eine Stromlinienquelle bedeutet einen Potentiallinienwirbel und umgekehrt. Vergleicht man ein Potentiallinienfeld mit dem ebenen Feld magnetischer Kraftlinien, so ist jetzt die Übereinstimmung vollkommen einschließlich des Vorzeichens der Kräfte und des Induktionsgesetzes. Will man nämlich diejenige Druckdifferenz zwischen zwei Punkten des Feldes bestimmen, die von der Bernoullischen Druckdifferenz der stationären Strömung abweicht, so muß man eine Verbindungslinie dieser Punkte ziehen und auf ihr die zeitliche Änderung in der Anzahl der Potentiallinien feststellen, die diese Verbindungslinie schneiden. Dabei darf die Verbindungslinie nicht über Quellpunkte der Potentiallinien hinweggleiten. Es ist dies dieselbe Vorschrift, die auch zur Bestimmung der induzierten elektromotorischen Kräfte anzuwenden ist. Um eindeutig entscheiden zu können, ob man die Verbindungslinie über eine Quelle hinwegschiebt, dürfen die Quellen nicht

entstehen oder verschwinden können. Dies ist aber offenbar bei magnetischen Quellen dadurch erfüllt, daß ein Nordpol nur durch Auseinanderziehen von einem Nord- und Südpol gleicher Stärke entstehen kann. Die Quellen der Potentiallinien bedeuten Wirbel der Stromlinien, und es ist eine Folge der Helmholtzschen Wirbelsätze, daß in der ebenen Strömung ein rechtsdrehender Wirbel nur durch Auseinanderziehen eines rechtsdrehenden und eines linksdrehenden Wirbels erzeugt werden kann. Bei diesen ebenen Feldern geht die Gleichartigkeit also außerordentlich weit. Für räumlich ausgebreitete magnetische und hydrodynamische Felder erfährt die Gleichartigkeit Einschränkungen, weil die Kraftlinien auch im Raume Linien bleiben, während aus den Potentiallinien Potentialflächen entstehen, sofern sich überhaupt eindeutige Flächen normal zu den Stromlinien legen lassen. Man muß sich daher im allgemeinen darauf beschränken, nur das hydrodynamische Geschwindigkeitsfeld mit dem magnetischen Kraftfeld zu vergleichen. Setzt man Geschwindigkeit und magnetische Feldstärke gleich, so entspricht dabei dem Magnetpol die Quelle und dem stromdurchflossenen Draht der hydrodynamische Wirbel, in bezug auf das Induktionsgesetz sind dagegen gerade der stromdurchflossene Draht und die hydrodynamische Quelle vergleichbar.)

Während die Kraftgesetze an Quellen, Senken und Wirbeln zwar ihre Form nahezu beibehalten, wenn man von der Hydrodynamik zur Gasdynamik übergeht, dagegen ihren Anwendungsbereich zum großen Teil einbüßen, muß das hydrodynamische Induktionsgesetz einem ähnlich gebauten gasdynamischen Induktionsgesetz entsprechen und zugleich seinen Anwendungsbereich einigermaßen beibehalten, weil es nur von Druckunterschieden der nichtstationären Strömung gegenüber der stationären Strömung handelt. Diesem Druckunterschied entspricht die Förderhöhe an Gebläsen. Im folgenden wird daher die allgemeine Ableitung des gasdynamischen Induktionsgesetzes angegeben, wie der Verfasser sie erstmalig im Sommer 1936 in einem Kolloquium über Gasdynamik bei der DVL unter dem Vorsitz von E. Trefftz vorgetragen hat. In einem zweiten Teil wird dann gezeigt, daß das Drehmoment am Schaufelstern bei der reibungslosen Gasströmung auch bei Umfangsgeschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit nicht wie bei der reibungslosen Flüssigkeitsströmung allein aus der nutzbaren Förderhöhe hervorgeht, daß vielmehr auch ohne nutzbare Förderhöhe Energiemengen vom drehenden Schaufelstern abgestrahlt werden können.

I. Förderhöhe eines Radialgebläses.

1. Ableitung des gasdynamischen Induktionsgesetzes. In der Neubearbeitung des Abschnittes Hydrodynamik für die 8. Auflage von A. Föppl „Vorlesungen über technische Mechanik", Band IV, habe ich auf Seite 417 das „hydrodynamische Induktionsgesetz" abgeleitet. Beschränkt man sich auf eine verlustlose Gasströmung mit konstanter Entropie, so läßt sich die Ableitung ohne weiteres auf Gase übertragen.

Für ein reibungsloses, schwerefreies Gas vom Drucke p, der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ mit dem Komponenten u, v, w in den Richtungen der räumlichen Koordinaten x, y, z erhält man in Abhängigkeit von der Zeit t folgende Bewegungsgleichungen:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\varrho\frac{d u}{d t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y}=\varrho\frac{d v}{d t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z}=\varrho\frac{d w}{d t} \quad \ldots \ldots \ldots (1).$$

Bei konstanter Entropie s gilt für den Wärmeinhalt i des Gases:

$$d i=\frac{d p}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in (1) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=\frac{d u}{d t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial y}=\frac{d v}{d t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial z}=\frac{d w}{d t} \quad \ldots \ldots \ldots (3).$$

Für eine bestimmte Zeit $t=t_0$ kann man diese drei partiellen Ableitungen zu folgendem totalen Differential des Wärmeinhaltes im Raume vereinigen:

$$-d i=\frac{d u}{d t}d x+\frac{d v}{d t}d y+\frac{d w}{d t}d z \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Trifft man nun die Verabredung, daß die Komponenten $d x$, $d y$, $d z$ eines räumlichen Linienelementes, die in Gl. (4) nur für die Zeit $t=t_0$ benutzt werden, für alle Zeiten die Komponenten eines an das Gas gebundenen Linienelementes sein sollen, das die mit dem

Gase bewegten benachbarten Punkte G_1 und G_2 verbindet, so ist in (4) folgende Umformung erlaubt:

$$-d\,i = \frac{d}{d\,t}(u\cdot d\,x + v\cdot d\,y + w\cdot d\,z) - u\cdot d\,u - v\cdot d\,v - w\cdot d\,w \quad . \;.\;.\;. \quad (5),$$

denn in diesem Falle gilt die Vertauschung der Differentiation: $\frac{d}{d\,t}(d\,x) = d\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) = d\,u$ usw. Rückt man die an das Gas gebundenen Punkte G_1 und G_2 auseinander, so kann man die in (5) angegebenen Differentiale längs einer an das Gas gebundenen Linie von G_1 nach G_2 integrieren und erhält dann folgende Wärmeinhaltsdifferenz:

$$i_1 - i_2 = \frac{d}{d\,t}\left[\int_{G_1}^{G_2}(u\cdot d\,x + v\cdot d\,y + w\cdot d\,z)\right] + \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) \quad . \;. \quad (6).$$

Führt man statt der an das Gas gebundenen Punkte G_1 und G_2 die raumfesten Punkte P_1 und P_2 ein, die zur Zeit $t = t_0$ mit diesen indentisch waren, so kann man die an das Gas gebundene Linie zwischen G_1 und G_2 noch durch jene Gaspunkte verlängern, die nach der Zeit $t = t_0$ über die Punkte P_1 und P_2 hinweggestrichen sind. (Abb. 1). Die Integration längs dieser ebenfalls an das Gas gebundenen und daher im zeitlichen Wandel eindeutigen Verbindungslinie der festen Punkte P_1 und P_2 enthält gegenüber der in Gl. (6) verlangten Integration Beiträge, die aus der Verschiebung der Integrationsgrenzen hervorgehen und den Wert $(\mathfrak{w}_1^2 - \mathfrak{w}_2^2)\cdot d\,t$ haben. Bringt man diese in Abzug, so erhält man folgende Beziehung:

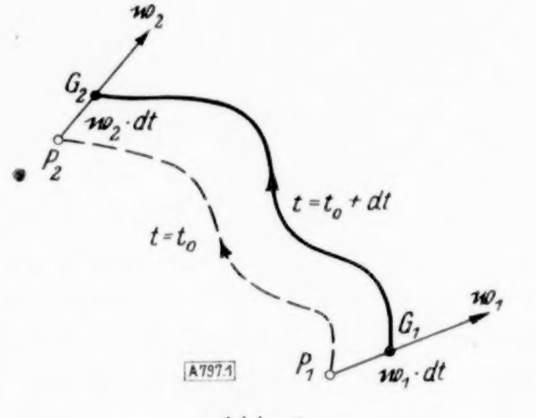


Abb. 1.
Bewegung des Integrationsweges.

$$i_1 - i_2 = \frac{d}{d\,t}\left[\int_{P_1}^{P_2}(u\cdot d\,x + v\cdot d\,y + w\cdot d\,z)\right] - \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$$

oder

$$i_2 + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) - \left\{i_1 + \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\right\} = -\frac{d}{d\,t}\int_{P_1}^{P_2}(u\cdot d\,x + v\cdot d\,y + w\cdot d\,z) \quad (7).$$

Die rechte Seite der Gleichung stellt die induzierte Förderhöhe dar, die zwischen den Punkten P_1 und P_2 erzeugt wird. Es ist dabei zu beachten, daß es sich nicht um eine partielle Differentiation nach der Zeit handelt, sondern um eine totale Differentiation längs einer mit dem Gas bewegten Linie. Die Wahl der Linie zur Zeit t_0 ist willkürlich. Bewegt man diese einmal gewählte Linie nicht genau mit dem Gas, so entsteht ein Fehler, der den Wirbeln proportional ist, die sich zwischen der exakt mit dem Gas bewegten Linie und der falschen Verbindungslinie befinden.

2. Anwendungen des Induktionsgetzes. In einer wirbelfreien stationären Gasströmung verschwindet die rechte Seite von Gl. (7), weil erstens das Integral wegen der Wirbelfreiheit unabhängig vom Weg gleich der Potentialdifferenz $\Phi_2 - \Phi_1$ ist und zweitens diese Potentialdifferenz wegen des stationären Zustandes unabhängig von der Zeit ist.

Bei einer mit Wirbel behafteten stationären Gasströmung verschwindet die rechte Seite von (7) nur für solche Punkte P_1 und P_2, die auf derselben Stromlinie liegen. Legt man nämlich die Verbindungslinie von P_1 nach P_2 entlang dieser Stromlinie, so bleiben ihre sämtlichen Punkte auch später auf dieser Stromlinie. Der ganze Integrationsweg ändert sich mit der Zeit nur dadurch, daß eine in sich zurücklaufende Schleife über den stromabwärts gelegenen Punkt P_2 hinausgeht, die aber zum Integral nichts beiträgt. Der Wert des Integrales auf dem restlichen Stück von P_1 nach P_2 ist wieder von der Zeit unabhängig, so daß die rechte Seite von (7) verschwindet. Das Verschwinden der rechten Seite von (7) bedeutet auf der linken Seite die Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung für die Gasströmung.

Bei der wirbelfreien aber zeitlich veränderlichen Strömung ist der Wert des Integrals in jedem Augenblick unabhängig vom Weg gleich der Potentialdifferenz $\Phi_2 - \Phi_1$. Da sich aber die Geschwindigkeitsverteilung mit der Zeit ändert, wird auch die Potentialdifferenz zeitabhängig und man erhält die bekannte Beziehung:

$$i_2 + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) - \left\{ i_1 + \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) \right\} = -\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

oder

$$i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Dies ist die erweiterte Bernoullische Gleichung der nichtstationären wirbelfreien Gasströmung.

Eine weitere Anwendung des Induktionsgesetzes ist für nichtstationäre Gasströmungen möglich, die sich periodisch mit der Zeit verändern. Man kann in diesem Fall statt der Förderhöhe in jedem Augenblick leichter den Mittelwert der Förderhöhe für die Periode von der Zeitdauer T bestimmen. Integriert man nämlich die rechte Seite von (7) nach t über die Periode und dividiert dann durch die Zeit dieser Periode, so erhält man den zeitlichen Mittelwert:

$$h = \frac{1}{T}\left\{ \left[\int_{P_1}^{P_2} (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz) \right]_{t_0} + \left[\int_{P_2}^{P_1} (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz) \right]_{t_0 + T} \right\} \quad \ldots (9).$$

Da das Geschwindigkeitsbild zur Zeit t_0 und $t_0 + T$ dasselbe ist, bedeutet die oben angegebene mittlere Förderhöhe die Zirkulation in einem Momentbild des Geschwindigkeitsfeldes auf einer geschlossenen Linie von P_1 über P_2 zurück nach P_1, die durch die Zeit T zu dividieren ist.

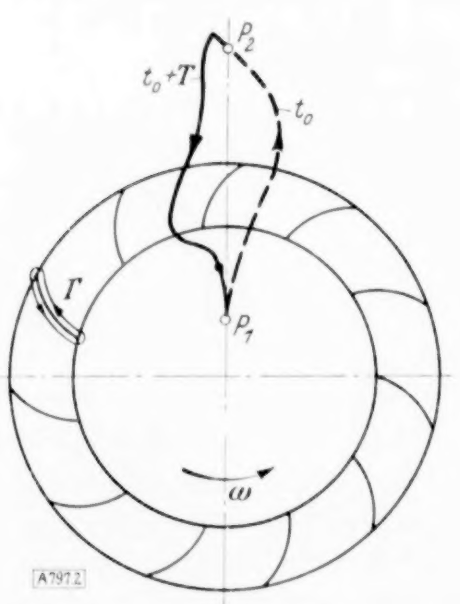


Abb. 2. Drehender Schaufelstern.

In Abb. 2 ist gezeigt, wie man diese Vorschrift auf die sicher periodische Strömung in einem Kreiselrad anwendet. Man erkennt, daß die verlangte Zirkulation nach Gl. (9) gerade mit der Zirkulation Γ um eine Schaufel übereinstimmt. Bei m Schaufeln und einer Winkelgeschwindigkeit des Schaufelsternes ω ist die Periode gegeben durch $T = \frac{2\pi}{m\omega}$, danach ergibt sich also die Förderhöhe des Kreiselrades zu:

$$h = \frac{\Gamma}{T} = \frac{\Gamma m \cdot \omega}{2\pi} \quad \ldots \ldots \ldots (9a).$$

Hiermit ist die Bedeutung der Zirkulation um die Schaufeln des Schaufelsternes in bezug auf die Förderhöhe für sämtliche Gasströmungen ohne Entropievermehrung sichergestellt. Es bleibt jedoch zu untersuchen, ob auch das Drehmoment und damit die Antriebsleistung in gleicher Weise von der Schaufelzirkulation abhängt.

II. Drehmoment des Schaufelsternes ohne Fördermenge.

Das Drehmoment des Schaufelsternes in ebener Strömung läßt sich aus der Differenz der Impulsmomente auf einem Kontrollkreis außerhalb des Schaufelsternes und innerhalb des Schaufelsternes ermitteln. Bildet man in Polarkoordinaten die Geschwindigkeitskomponenten in Richtung des Radius und des Umfanges w_r und w_u, wobei w_u positiv in der Richtung des wachsenden Winkels ψ gezählt wird, so ergibt sich auf dem Bogenelement $r \cdot d\psi$ eines Kreises vom Radius r die Durchflußmenge $\varrho \cdot w_r \cdot r \cdot d\psi$. Den Impuls dieser Menge in Umfangsrichtung erhält man durch Multiplikation mit w_u, das Impulsmoment durch Multiplikation mit $r \cdot w_u$. Durch Integration des Impulsmomentes über den ganzen Umfang erhält man ein Drehmoment:

$$D = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} \varrho \cdot w_r \cdot w_u \cdot d\psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Wird die Fördermenge im Inneren des Schaufelsternes ohne Drall zugeführt, so läßt sich ein genügend kleiner Radius angeben, auf dem noch keine Umfangskomponenten der Geschwindigkeit auftreten. In diesem Falle ergibt das Integral über den äußeren Kreis nach Gl. (10) bereits das Drehmoment des Schaufelsterns. Bei einer Flüssigkeitsströmung mit $\varrho =$ konst. gehen die Geschwindigkeitskomponenten w_r und w_u beim Fehlen von Hindernissen außerhalb des Schaufelsterns keine Korrelation ein, so daß für die Integration über w_u der Mittelwert von w_r vor das Integral gezogen werden kann. Der Mittelwert von w_r multipliziert mit der Dichte ϱ und dem Kreisumfang $2\,r\,\pi$ ist aber gerade die sekundlich durch den Schaufelstern geförderte Masse G. Daher läßt sich bei Flüssigkeitsströmungen folgende Zerlegung des Drehmomentes vornehmen:

$$D = \frac{G}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} w_u \cdot r \cdot d\,\psi = G \cdot m \cdot \frac{\Gamma}{2\,\pi} = \frac{G \cdot h}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Hierin ist m die Schaufelzahl und Γ die Zirkulation um jede der m Schaufeln, die letzte Umformung ergibt sich aus Gl. (9a). In der Flüssigkeitsströmung ist daher sowohl eine Fördermenge als auch eine Zirkulation um die Schaufeln erforderlich, wenn ein Drehmoment auftreten soll.

Da nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes die Förderhöhe auch bei der Gasströmung direkt von der Schaufelzirkulation abhängt, hätte man eine gewisse Berechtigung zu vermuten, daß auch bei der Gasströmung in der Gl. (10) keine Korrelation zwischen Durchflußmenge und Schaufelzirkulation eintritt. Um diese Frage im negativen Sinne zu entscheiden, genügt aber ein einziges Beispiel, bei dem ein Drehmoment ohne Fördermenge oder ohne Schaufelzirkulation auftritt. Bei dem gewählten Beispiel tritt sogar weder eine Fördermenge noch eine Schaufelzirkulation auf, und trotzdem erhält man bei höheren Gasgeschwindigkeiten ein von Null verschiedenes Drehmoment.

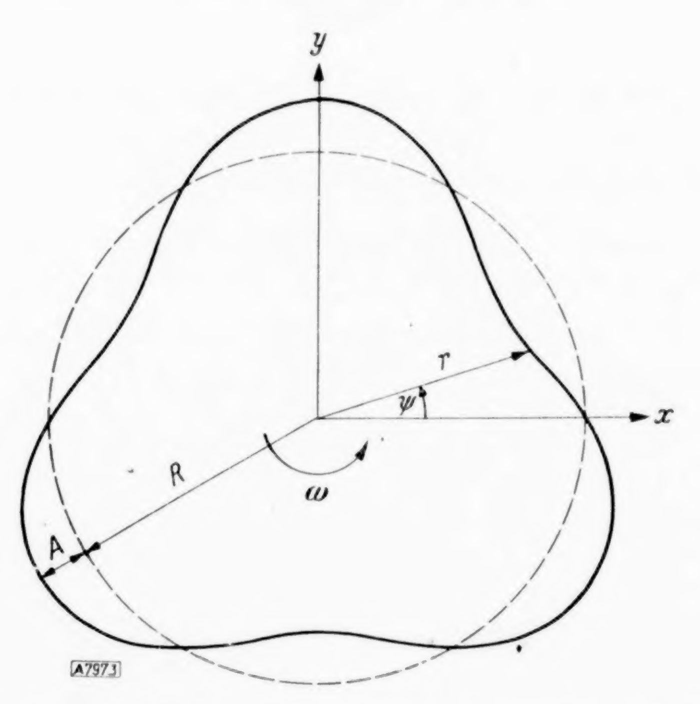


Abb. 3. Querschnitt des mit $m = 3$ Wellen versehenen Zylinders.

Um die Strömung für den Fall verschwindender Durchflußmenge und verschwindender Schaufelzirkulation in großer Entfernung vom Schaufelstern wiederzugeben, kann man den Schaufelstern durch einen umlaufenden unrunden Zylinder ersetzen. Der einfachste unrunde Zylinder besitzt einen Querschnitt, bei dem ein Kreis vom Radius R durch m sinusförmige Wellen auf dem Umfang mit der Wellenamplitude A überlagert wird. (Abb. 3 für den Fall $m = 3$). Will man einen Schaufelstern mit m Schaufeln in seiner Wirkung noch genauer wiedergeben, so könnte man außerdem noch weitere Wellen mit den Amplituden A_2, A_3, usw. und den Anzahlen $2\,m$, $3\,m$, usw. hinzufügen. Beschränkt man sich zur weiteren Vereinfachung der Rechnung auf kleine Amplituden A im Vergleich zum Radius R oder besser zur Wellenlänge $L = \frac{2\,R\,\pi}{m}$, so kann man in der Gl. (8) das Quadrat der Gasgeschwindigkeit gegenüber den anderen Summanden vernachlässigen. Unter Berücksichtigung konstanter Entropie nach Gl. (2) erhält man dann:

$$i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \frac{d\,p}{\varrho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Aus dem Potential $\Phi(r, \psi)$ ergeben sich die Geschwindigkeitskomponenten in folgender Weise:

$$w_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad w_u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Hiermit erhält man die Kontinuitätsgleichung der nichtstationären Gasströmung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\varrho}{r}\left[\frac{\partial (r \cdot w_r)}{\partial r} + \frac{\partial w_u}{\partial \psi}\right] = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2}\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Aus (12) und (14) ergibt sich die bekannte Gleichung der Schallausbreitung:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

in der a die Schallgeschwindigkeit des Gases nach folgender Beziehung ist:

$$a^2 = \frac{d p}{d \varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Da der Druck und die Dichte bei den kleinen Geschwindigkeiten nur wenig von den Werten des ruhenden Gases p_0 und ϱ_0 abweichen, kann a konstant gleich dem Wert der Schallgeschwindigkeit für diesen Zustand betrachtet werden. Durch Integration des Druckes bei konstanter Dichte ergibt sich aus (12) der Druck:

$$p = p_0 - \varrho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Als Randbedingung für die Differentialgleichung (15) ist die Undurchdringbarkeit der Oberfläche des mit Wellen versehenen Zylinders anzusetzen. Zur Zeit $t = 0$ besitzt der Zylinder folgende Radien r in Abhängigkeit vom Zentriwinkel ψ:

$$r = R - A \cdot \sin m\,\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Wegen seiner Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Abb. 3) erhält man die Abhängigkeit der Zylinderradien von ψ und t:

$$r(\psi, t) = R - A \sin m(\psi - \omega t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Hieraus folgt ein radialer Schlag bei der Drehung des unrunden Zylinders von der Geschwindigkeit:

$$w_r = \frac{\partial r}{\partial t} = A\, m\, \omega \cos m(\psi - \omega t).$$

Bei der Kleinheit der Amplitude A genügt es, diesen Wert für die Radialkomponente der Gasgeschwindigkeit vorzuschreiben. Nach Gl. (13) ergibt sich daraus die Randbedingung für Φ:

$$w_r = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = A\, m\, \omega \cos m(\psi - \omega t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Da die Integration der Differentialgleichung für die Schallausbreitung an sich bekannt ist und es hier nur auf die Anwendung beim Schaufelstern ankommt, kann die Nebenrechnung und die Bestimmung der Integrationskonstanten weggelassen werden, wenn gesagt wird, daß die Aussonderung der Konstanten so erfolgt ist, daß bei der asymptotischen Entwicklung der Lösung für große Radien nur nach außen laufende, keine nach innen laufenden Wellen berücksichtigt wurden. Die hierdurch eindeutig gewordene Lösung läßt sich in den Besselschen Funktionen erster und zweiter Art J_m und Y_m schreiben und lautet:

$$\Phi = a \cdot A \cdot \frac{Y_m\left(\frac{m\,\omega\, r}{a}\right) \cdot \cos(m\,\psi - m\,\omega\, t + \delta) + J_m\left(\frac{m\,\omega\, r}{a}\right) \sin(m\,\psi - m\,\omega\, t + \delta)}{\sqrt{\left[Y_m'\left(\frac{m\,\omega\, R}{a}\right)\right]^2 + \left[J_m'\left(\frac{m\,\omega\, R}{a}\right)\right]^2}} \quad . \quad (21).$$

Für den hierin enthaltenen, an sich unwesentlichen Phasenwinkel δ gilt der Wert:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{J_m'\left(\frac{m\,\omega\,R}{a}\right)}{Y_m'\left(\frac{m\,\omega\,R}{a}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (22).$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichung für das Drehmoment (10) ein, so gelingt deren Integration mit Hilfe der Formel[1]):

$$J_m(x)\cdot Y_m'(x) - Y_m(x)\cdot J_m'(x) = \frac{2}{\pi\,x}.$$

Man erhält dadurch das Drehmoment:

$$D = \frac{2\,\varrho_0\,m\,a^2\,A^2}{\left[J_m'\left(\frac{m\,\omega\,R}{a}\right)\right]^2 + \left[Y_m'\left(\frac{m\,\omega\,R}{a}\right)\right]^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23).$$

Die zum Antrieb notwendige Leistung $E = D\cdot\omega$ entspricht der abgestrahlten Schalleistung.

Um die Ergebnisse dimensionslos darzustellen, soll als Machsche Zahl M der Gasströmung das Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit u zur Schallgeschwindigkeit a benutzt werden:

$$M = \frac{u}{a} = \frac{R\,\omega}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (24),$$

es soll ein Beiwert für den Bewegungswiderstand c_w gleich dem Drehmoment D dividiert durch den Staudruck $q = \frac{1}{2}\varrho_0 u^2$, die Mantelfläche des Zylinders $F = 2\,R\,\pi$ und den Radius R eingeführt werden:

$$c_w = \frac{D}{\frac{1}{2}\varrho_0\,u^2\cdot 2\,R^2\,\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (25)$$

und ein zweiter Beiwert für die abgestrahlte Energie c_e gleich der abgestrahlten Energie $E = D\cdot\omega$ dividiert durch q, F und die Schallgeschwindigkeit a gebildet werden:

$$c_e = \frac{E}{\frac{1}{2}\varrho_0\,u^2\cdot a\cdot 2\,R\,\pi} = c_w\cdot M \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26).$$

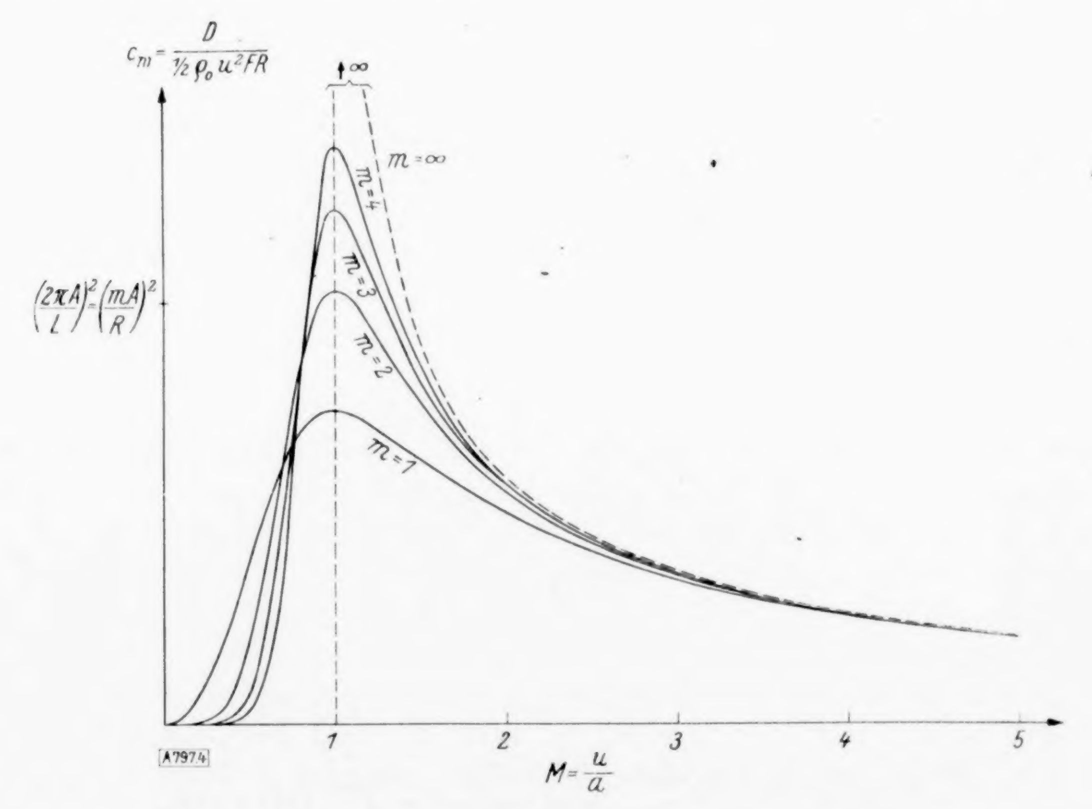


Abb. 4. Widerstand bei Drehung des gewellten Zylinders.

[1]) Vgl. Frank-Mises: Differentialgleichungen der Physik 1930, 1. Bd. S. 414.

In dieser Form sind in den Abb. 4 und 5 die Ergebnisse der Rechnung aufgetragen, wobei als die Abszisse die Machsche Zahl und als Ordinate die Beiwerte c_w bzw. c_e verwandt wurden. Die an den Linienzügen angegebenen Werte m bedeuten die Anzahl Wellen auf dem Kreisumfang. Die Ordinate besitzt als Einheit einen Wert, der aus der Amplitude A und der Wellenlänge L bzw. der Amplitude A, der Wellenzahl m und dem Radius R gebildet ist.

Aus den Abbildungen erkennt man, daß das Drehmoment und ebenso die abgestrahlte Energie nur für die Flüssigkeitsströmung und für die Gasströmung mit sehr kleinen Geschwindigkeiten verschwindet. Im Unterschallbereich ergibt sich bei wachsendem m ein immer größeres Gebiet, in dem keine nennenswerten Drehmomente auftreten. Das Maximum von c_w liegt stets bei der Machschen Zahl 1.

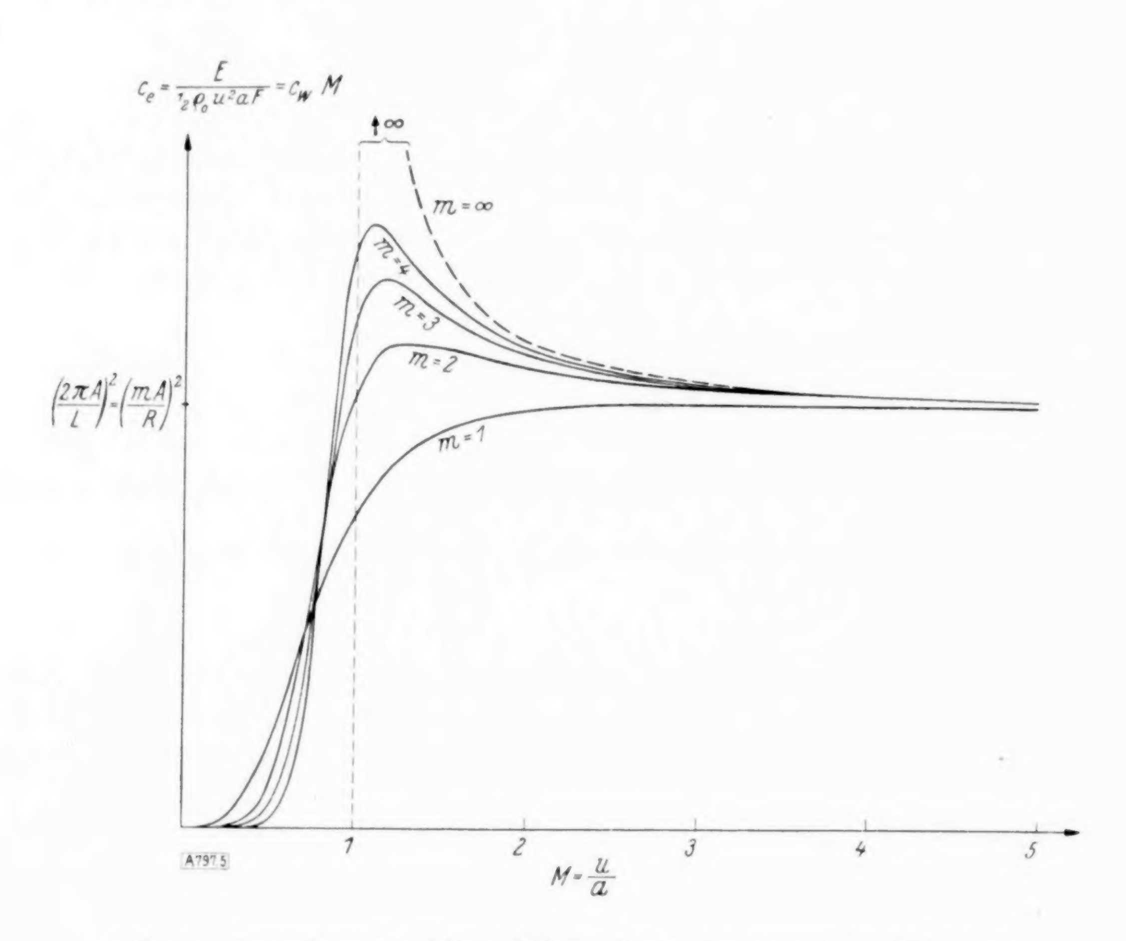


Abb. 5. Energieausstrahlung bei Drehung des gewellten Zylinders.

Es ist interessant, den drehenden gewellten Zylinder in einer ruhenden Gasströmung und den von G. J. Taylor behandelten ruhenden gewellten Zylinder mit einer Zirkulationsströmung zu vergleichen[2]). Während dort festgestellt wurde, daß auch noch bei Überschreitung der Schallgeschwindigkeit abklingende Störungswellen auftreten, ergibt sich in obiger Rechnung umgekehrt, daß auch schon unterhalb der Schallgeschwindigkeit die Störung bis ins Unendliche reicht. Beide Fälle vereinigen sich bei $m = \infty$, d. h. großem Zylinderradius im Vergleich zur Wellenlänge, zu der schon vorher von J. Ackeret behandelten ebenen Platte mit sinusförmigen Wellen[3]).

Zusammenfassung. Es wird am ebenen Schaufelstern gezeigt, daß bei der Gasströmung mit konstanter Entropie die Förderhöhe eines drehenden Schaufelsterns wie bei der Flüssigkeitsströmung allein von der Zirkulation um die Schaufeln abhängig ist. Im Gegensatz zur Flüssigkeitsströmung erhält man aber bei dem frei drehenden Schaufelstern in unendlicher Gasmasse ein größeres Drehmoment als zur Erzeugung der Förderhöhe nötig wäre, weil durch die periodische Störung, die vom drehenden Schaufelstern ausgeht, Schallwellen mit endlicher Energie ins Unendliche abwandern. Diese Energie erzeugt einen Widerstand, der bei kleinen Umfangsgeschwindigkeiten mit hoher Potenz beginnt und bei Überschreitung der Schallgeschwindigkeit in den Wellenwiderstand der mit Überschallgeschwindigkeit geradeaus bewegten Körper[3]) übergeht.

[2]) G. J. Taylor: ZAMM 10, S. 334, 1930.

[3]) J. Ackeret: Helvetia Phys. Acta 1, 301 (1928).

Über die Versickerung von Wasser aus Kanälen in tiefen Grund.

Abhandlungen zur Hydrodynamik VIII.

Von *Georg Hamel* in Berlin.

1. Das Problem der Versickerung von Wasser aus Kanälen oder Flußläufen in sandigen Grund, in dem das Darcysche Filtergesetz gilt, ist wiederholt behandelt worden, zuletzt von Herrn Wedernikow in dieser Zeitschrift[1]). Trefftz hat zusammen mit L. Hopf zwar nicht gerade dieser Aufgabe, aber der Grundwasserströmung überhaupt eine grundlegende Untersuchung gewidmet[2]).

Bisher konnte man von unserer Aufgabe Sonderfälle lösen. Wir wollen sie hier in gewissem Sinne mit einfachen funktionentheoretischen Mitteln vollständig lösen.

Wir setzen ebene, stationäre Strömung voraus; in unendlicher Tiefe, also für $x \to +\infty$ soll Parallelströmung mit der bekannten Geschwindigkeit k eintreten.

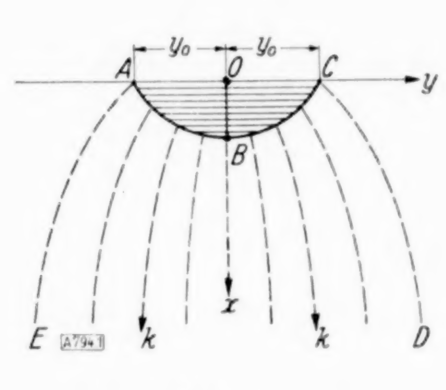


Abb. 1.

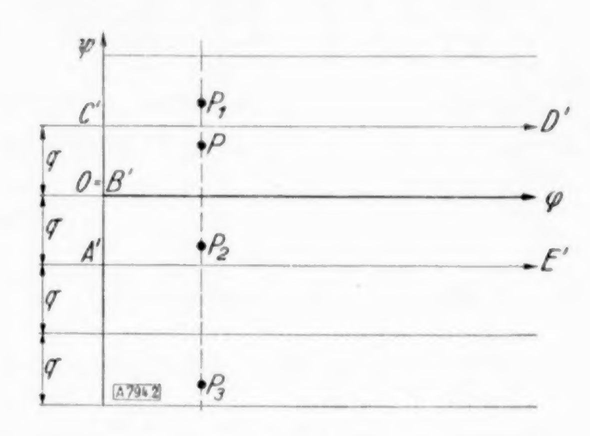


Abb. 2.

ABC sei der Querschnitt des mit Wasser gefüllten Kanals, aus dem Wasser in die Tiefe sickert. $x = 0$ sei der horizontale Wasserspiegel, $2\,y_0$ seine Breite. Der Einfachheit halber sei Symmetrie zur x-Achse vorausgesetzt. x sei nach unten gerichtet.

Die Allgemeinheit besteht in folgendem Sinne: Wenn es gelingt, die Kurve ABC in der Form einer verallgemeinerten Zykloide, d. h. als Überlagerung von Epizykeln darzustellen, d. h. mit Hilfe eines geeigneten Parameters ω, in der Form

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n+1)\,\omega\,, \qquad y = b\,\omega + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2n+1)\omega\,, -\frac{\pi}{2} \le \omega \le \frac{\pi}{2}\,,$$

so ist das Problem gelöst. Wir werden sehen, daß diese Form bestehen muß. Es gelten dann weiter: für die Kurve $CD\left(\text{mit } \frac{q}{k} = -\frac{\pi}{2}\,b > 0\right)$

$$y = \frac{1}{k}\,q - \Sigma(-1)^n\,a_n\,e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)kx}\,,$$

an der Linie ABC für die Geschwindigkeit

$$\frac{1}{u - i\,v} = \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2\,q} \sum (2\,n+1)\,a_n\,e^{(2n+1)\,\omega\,i}\,.$$

Von dieser Theorie aus gesehen, ist der einfachste Fall

$$x = a_0 \cos\omega\,, \qquad y = b\,\omega + a_0 \sin\omega\,,$$

[1]) Wedernikow: „Über die Sickerung und Grundwasserbewegung mit freier Oberfläche." Diese Z., Bd. 17, Heft 3. Ferner: „Versickerungen aus Kanälen" in „Wasserkraft und Wasserwirtschaft", Jg. 29, 1934, siehe auch Jg. 30, 1935. Vergleiche dazu Kozeny: „Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluß- und Kanalversickerung" in derselben Z.

[2]) Hopf und Trefftz: „Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben in dieser Z., Bd. 1.

d. h. ABC ist ein Zykloidenbogen. Hierzu siehe die genannten Arbeiten.

Die Tiefe $0B$ ist durch $x_{\omega=0} = \Sigma a_n$,

die Breite $0C$ durch $$y_0 = y_{\omega=-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k} q - \Sigma a_n (-1)^n$$

gegeben. q bedeutet die halbe versickernde Wassermenge.

2. Durchführung. Wir setzen als bekannt voraus[3]): Die Strömung besitzt ein Potential

$$\varphi + i \psi = f(z) \text{ mit } z = x + i y .$$

Es gilt ferner für sehr langsame Bewegung, die wir wie üblich annehmen wollen, statt der Bernoullischen Gleichung unter Vernachlässigung des Quadrates der Geschwindigkeit

$$\frac{p}{\gamma} - x + \frac{1}{k} \varphi = \text{const} .$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung des Druckes und gibt für die Ränder EA und CD die Bedingung

$$x = \frac{1}{k} \varphi ,$$

wenn wir auf ABC, wo φ konstant ist, $\varphi = 0$ annehmen.

Weiter ist CD eine Stromlinie mit $\psi = q$, AE eine Stromlinie mit $\psi = -q$.

Somit ist unser Gebiet der x, y-Ebene auf den Halbstreifen $A' B' C' D' E'$ der $f = \varphi + i \psi$-Ebene abzubilden. Abb. 2.

Wir wissen noch, daß auf $C' D'$ und auf $A' E'$ $\varphi = k x$ gilt.

Wir studieren zweckmäßig als Funktion von f die Funktion

$$W(f) = i z - \frac{i}{k} f = i \left(x + i y - \frac{1}{k} (\varphi + i \psi) \right).$$

Sie wurde von Hopf und Trefftz 1921 eingeführt, später erst von Joukowsky.

W ist offenbar reell auf $A' E'$ und auf $C' D'$. Mithin können wir sie an diesen Graden spiegeln (nach H. A. Schwarz). In P_1 hat W den konjugierten Wert $\overline{W}$ von dem Wert W in P. Oder es ist

$$W(\varphi + (2 q - \psi) i) = \overline{W(\varphi + i \psi)} .$$

Derselbe Wert herrscht wegen der Spiegelung an $A' E'$ in P_3, dem Spiegelpunkt von P zu $A' E'$. Es ist aber

$$f_{P_1} = f_{P_3} + 4 q i ,$$

d. h. W hat die Periode $4 q i$.

Wegen der vorausgesetzten Symmetrie ist noch

$$x_P = x_{P_2} , \qquad y_P = - y_{P_2} , \qquad \varphi_P = \varphi_{P_2} , \qquad \psi_P = - \psi_{P_2} ,$$

also der Realteil von W antisymmetrisch, der Imaginärteil symmetrisch, also

$$W_{P_2} = - \overline{W}_P = - W_{P_1} \qquad \text{oder} \qquad W(f + 2 q i) = - W(f) .$$

Mithin existiert W regulär in der rechten Halbebene von f. Im Unendlichen ($x \to + \infty$) der rechten Halbebene konvergiert W gegen null, weil dort die Parallelströmung mit $\varphi = k x$, $\psi = k y$ herrschen soll.

---

3) Siehe außer den genannten Arbeiten Hamel: „Über Grundwasserströmung", in dieser Z., Bd. 14. Ferner das Buch von Robert Dachler: „Grundwasserströmung", Verlag Julius Springer, Wien 1936; insbesondere Seite 101.

Deshalb bilden wir zweckmäßig die f-Ebene durch

$$\zeta = e^{-(\varphi + i\psi)\frac{\pi}{2q}}$$

auf den Einheitskreis der ζ Ebene so ab, daß $\varphi \to +\infty$, $\zeta = 0$, dem Streifen der Breite $4q$ bereits der volle Einheitskreis entspricht, auf dem selbst wegen $\varphi = 0$

$$\zeta = e^{-i\psi\frac{\pi}{2q}}$$

gilt. Abb. 3.

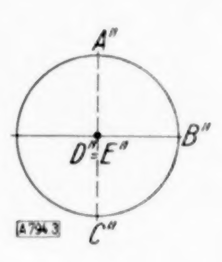


Abb. 3.

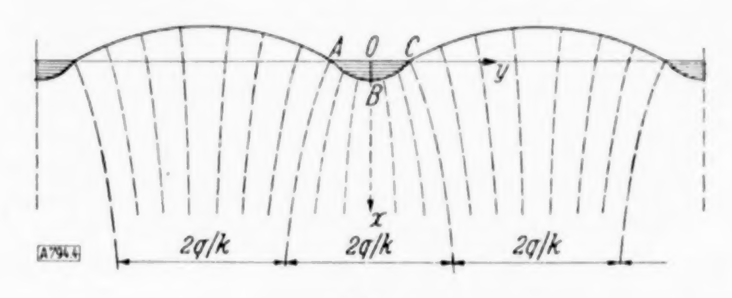


Abb. 4.

In diesem Einheitskreis ist dann W eine eindeutige, reguläranalytische Funktion, die im Nullpunkt null wird und also die Darstellung

$$W = i\sum_{1}^{\infty} a_n \zeta^n$$

gestatten muß. Für $\psi = 0$ ist $y = 0$ und deshalb $\zeta = e^{-\varphi\frac{\pi}{2q}}$ reell, W aber rein imaginär. Wegen $W(f + 2qi) = -W(f)$ gilt dasselbe für $\psi = 2q$, also auch für $\zeta = -e^{-\varphi\frac{\pi}{2q}}$. Mithin sind alle a_n reell. Ferner gilt

$$i\sum a_n \zeta^n = -i\sum a_n(-\zeta)^n = i\sum(-1)^{n+1} a_n \zeta^n$$

für alle reellen ζ; also sind die a_n mit geradem Index null, es bleibt nur

$$W = i\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{2n+1}.$$

Nun war

$$W = i\left(z - \frac{1}{k}f\right).$$

Also ergibt sich

$$z = \frac{1}{k}f + \sum a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)f}$$

als Ergebnis, oder zerlegt

$$x = \frac{1}{k}\varphi + \sum a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)\varphi}\cos\frac{\pi}{2q}(2n+1)\psi, \qquad y = \frac{1}{k}\psi - \sum a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)\varphi}\sin\frac{\pi}{2q}(2n+1)\psi.$$

Für die Linie ABC gilt wegen $\varphi = 0$

$$x = \sum a_n \cos\frac{\pi}{2q}(2n+1)\psi, \qquad y = \frac{1}{k}\psi - \sum a_n \sin\frac{\pi}{2q}(2n+1)\psi.$$

Insbesondere ist für den Punkt C, wo $\varphi = 0$, $\psi = q$ ist, $x = 0$ von selbst erfüllt,

$$y_0 = \frac{1}{k}q - \sum(-1)^n a_n.$$

Damit ist der wichtigste Teil des Satzes bewiesen, man hat nur noch

$$\omega = -\frac{\pi \psi}{2 q} \quad \text{und} \quad b = -\frac{2 q}{\pi k}$$

zu setzen.

Aus dem obigen

$$z = \frac{1}{k} f + \Sigma a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)f} \ldots$$

kann nun alles abgelesen werden:

Die Kurve $C D$ ist wegen $\psi = q$ und $\varphi = k x$ durch

$$y = \frac{1}{k} q - \Sigma (-1)^n a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1) k x}$$

gegeben, die Geschwindigkeit durch

$$\frac{1}{u - i v} = \frac{d z}{d f} = \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2 q} \sum (2 n + 1) a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)f}.$$

An der Wassergrenze $\varphi = 0$ ist die Geschwindigkeit

$$\frac{1}{u - i v} = \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2 q} \sum (2 n + 1) a_n e^{-\frac{\pi}{2q}(2n+1)\psi i}.$$

Damit ist unsere Aufgabe erledigt.

3. Beispiel, Bemerkungen. Für den einfachsten Fall eines Gliedes (siehe Einleitung) folgt

$$\frac{1}{u - i v} = \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2 q} a_0 e^{-\frac{\pi}{2q}(\varphi + i \psi)},$$

also an der Wasserfläche $\varphi = 0$

$$\frac{1}{u - i v} = \frac{1}{k} - \frac{\pi}{2 q} a_0 e^{-\frac{\pi}{2q}\psi i}.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\left| \frac{1}{u - i v} - \frac{1}{k} \right| = \frac{\pi}{2 q} a_0 .$$

Das Spiegelbild des Hodographen am Einheitskreis ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{k}$, der Hodograph ist selbst also auch einer. Man könnte von dieser Annahme ausgehen, um diesen Sonderfall der zykloidischen Begrenzung zu bekommen.

Ist die Oberfläche $A B C$ gegeben, so entsteht die neue Aufgabe, sie in der angegebenen Weise durch Epizykeln darzustellen. In der Praxis wird man versuchen, mit zwei oder drei Koeffizienten a_0, a_1, a_2 eine befriedigende Annäherung zu erreichen.

Folgende allgemeine Bemerkung verdient vielleicht noch Erwähnung. Aus der Periodizität der analytischen Funktion W, die sich in der Darstellung von x, y widerspiegelt, folgt, daß jedes solche Problem selbst eine analytische Fortsetzung hat. Für $-\frac{\pi}{2} \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$x(\pi - \omega) = -x(\omega), \qquad y(\pi - \omega) = a_0 \pi - 2 a_0 \omega + y(\omega).$$

Bei Vermehrung um 2ω kehrt x wieder, y vermehrt sich um $2\pi b$. Deshalb kann das Bild 1 stets zum Bild 4 vervollständigt werden.

Über die Konvergenz wäre noch zu bemerken: Wenn wir annehmen, was wohl für die Praxis allein in Frage kommt, daß überall x und y stetige Funktionen beschränkter Schwankung sind, so konvergieren die Reihen. Sollte sich aber doch das Bedürfnis herausstellen, einen allgemeineren Fall zu betrachten, so sind die Reihen in dem Sinne

$$x = \lim_{r \to 1,\ r \leq 1} \sum a_n r^{2n+1} \cos(2n+1)\omega,$$

$$y = \lim_{r \to 1,\ r \leq 1} \sum a_n r^{2n+1} \sin(2n+1)\omega + b\omega$$

zu verstehen.

Endlich möchte ich noch auf die Wichtigkeit der Annahme im Unendlichen hinweisen: gleichförmige Bewegung mit $\varphi - kx \to 0$ überall, nicht nur am Rande. Macht man diese Annahme nicht, so gibt es noch andere Möglichkeiten. So ist die Bemerkung des Herrn Kozeny in der genannten Arbeit zu verstehen, der die Ansicht ausspricht, daß zuweilen statt unserer, in eine Vertikalströmung konvergierenden Bewegung auch stark divergente Bewegungen möglich sind, wie es z. B. seinem Ansatz (in unserer Bezeichnung)

$$z = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2q}f} + e^{-\frac{\pi}{2q}f}\right) + \frac{1}{k}f,$$

d. h.

$$x = a \operatorname{Cof} \frac{\pi}{2q}\varphi \cos\frac{\pi}{2q}\psi + \frac{1}{k}\varphi, \qquad y = a \operatorname{Sin}\frac{\pi}{2q}\varphi \sin\frac{\pi}{2q}\psi + \frac{1}{k}\psi$$

entspricht. Hier ist wohl für $\psi = \pm q$, $x = \frac{1}{k}\varphi$, wie es die Randbedingung erfordert, für $\varphi = 0$, also die Wassergrenze, ist

$$x = a\cos\frac{\pi}{2q}\psi, \qquad y = \frac{1}{k}\psi \qquad \text{oder} \qquad x = a\cos\frac{\pi k}{2q}y,$$

d. h. ABC ist eine cos-Linie. Aber es ist nicht richtig, zu behaupten, daß dies die einzige Lösung in diesem Falle sei, und daß die besondere Gestaltung des cos-Bogens die divergente Strömung erzwinge. Diese kommt vielmehr daher, daß im Unendlichen

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{u - iv} \to \infty \; (\psi = \pm q), \qquad \text{also} \qquad u - iv \to 0,$$

und daß infolgedessen der Druck gegen ∞ geht. Ein unendlich großer Druck im Unendlichen zwingt die Flüssigkeit, zur Seite zu weichen und nicht die Natur des Bogens ABC.

Will man für den cos-Bogen eine Strömung haben, für die im Unendlichen überall der Außendruck der Atmosphäre herrscht und infolgedessen überall $\varphi - kx \to 0$, so muß man den cos-Bogen in der oben angegebenen Weise darzustellen suchen, aus

$$x = a\cos y\,\alpha = \sum a_n \cos(2n+1)\omega,$$

$$y = b\,\omega + \sum a_n \sin(2n+1)\omega \qquad \text{für} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$$

die a_n und b zu bestimmen suchen, was angenähert leicht möglich ist. Man darf dabei keineswegs unser q mit dem des Herrn Kozeny verwechseln, denn beide Strömungsarten werden verschiedene Wassermengen liefern.

Beitrag zur Beurteilung des Spannungszustandes einer gelochten Scheibe.

Von *H. Hengst* in Rheinhausen/Nrh.

Der Spannungszustand einer Scheibe mit kräftefreier Bohrung ist erstmalig von G. Kirsch angegeben worden. Dabei sind die Scheibenabmessungen im Vergleich zum Durchmesser der Bohrung unendlich groß angenommen. Er erhält als Tangentialspannung am Innenrande bei gleichförmiger Zugbelastung:

$$\sigma_\vartheta = c\,(1 - 2\cos 2\,\vartheta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

In der folgenden Arbeit verzichte ich auf die vereinfachende Annahme unendlicher Scheibenabmessungen und berechne die Tangentialspannungen am Innenrande einer Quadratscheibe aus einer schnell konvergierenden Reihe.

Die Definition des ebenen Spannungszustandes am differentialen Prisma führt mit dem Hookeschen Gesetz, den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen unter Benutzung einer Spannungsfunktion F nach G. B. Airy zu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Damit werden die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

befriedigt und die allgemeinen Differentialbeziehungen durch eine einzige Veränderliche F angegeben. Die Differentialgleichung des elastischen Spannungszustandes heißt dann:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = \Delta\Delta F = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

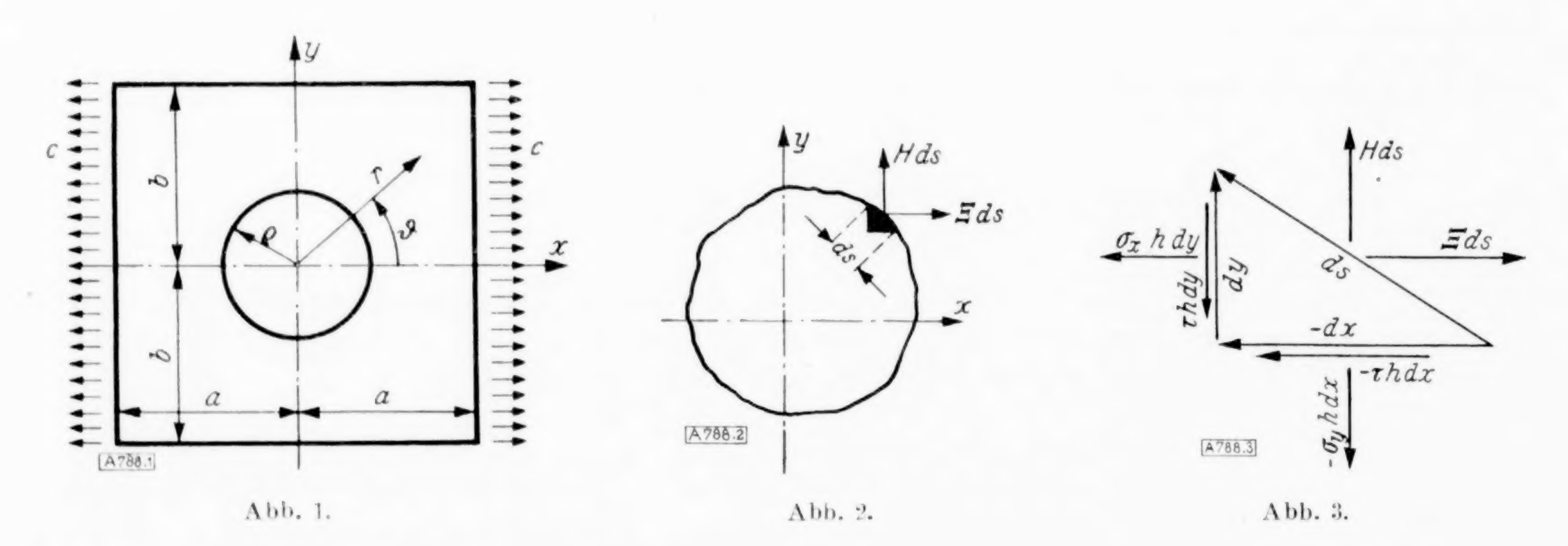


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

Die Spannungsfunktion F muß jedoch nicht nur die Gleichung (4), sondern auch die am Rande vorgeschriebenen, von der Begrenzung und Belastung des Systems abhängigen Bedingungen für (2) erfüllen. An einem Randelement ist:

$$\sigma_y \cdot h \cdot d\,x - \tau \cdot h \cdot d\,y = -H \cdot d\,s, \quad -\tau \cdot h \cdot d\,x + \sigma_x \cdot h \cdot d\,y = +\Xi\,d\,s \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{d\,x}{d\,s} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \cdot \frac{d\,y}{d\,s} = \frac{d}{d\,s}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\frac{H}{h}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \cdot \frac{d\,x}{d\,s} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{d\,y}{d\,s} = \frac{d}{d\,s}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = +\frac{\Xi}{h}.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{h}\int_A^S H\,d\,s + k_1 = -Q + k_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = +\frac{1}{h}\int_A^S \Xi\,d\,s + k_2 = +P + k_2 \quad \ldots \quad (6a),$$

$$F = \int_A^S \left(\frac{\partial F}{\partial x} d\,x + \frac{\partial F}{\partial x} d\,y\right) + k_3 = \int_A^S (-Q\,d\,x + P \cdot d\,y) + k_1\,x + k_2\,y + k_3 \quad \ldots \ldots \quad (6b).$$

Die beiden partiellen Ableitungen der Spannungsfunktion nach x und y bedeuten also die Summe der y- und x-Komponenten aller Kräfte zwischen einem beliebigen Anfangspunkt A und einem Bezugspunkt S des Randes, die Spannungsfunktion selbst ist ihr Moment. Auf diese Weise entsteht eine für die theoretische Behandlung des Problems wichtige Beziehung zwischen der mathematischen Operation und ihrer mechanischen Auslegung.

Die Konstanten k_1, k_2, k_3 sind bei einfach zusammenhängenden Bereichen willkürlich, da sie keinen Einfluß auf die Spannungen besitzen, welche nach (2) durch die zweiten Ableitungen der Funktion F ausgedrückt werden. Bei n-fach zusammenhängenden Bereichen müssen $3(n-1)$ Konstante aus der Eindeutigkeit des Verschiebungszustandes bestimmt werden.

Um die folgende Untersuchung auf ein beliebiges Koordinatensystem beziehen zu können, werden in (6c) die Ableitungen unter (6a) durch die Ableitung der Spannungsfunktion nach der Randnormalen ergänzt:

$$\frac{dx}{ds} = -\sin\vartheta = -\frac{dy}{dn}; \quad \frac{dy}{ds} = +\cos\vartheta = +\frac{dx}{dn};$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn} = -\left(Q\frac{dy}{ds} + P\frac{dx}{ds}\right) + k_1\cos\vartheta + k_2\sin\vartheta \quad . \ . \ . \ . \ . \ (6c).$$

Die Aufgabe besteht also in der Entwicklung einer Funktion, welche der Differentialgleichung $\Delta\Delta F$ genügt und am Rande die unter (6b), (6c) vorgeschriebenen Werte annimmt. Eine bekannte Lösungsmethode dieser Randwertaufgabe ist das „Verfahren von Ritz". Dieses approximiert die Spannungsfunktion $F_{(x,y)}$ als Reihe von Funktionen $c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}$, welche die Randbedingungen erfüllen, derart, daß die Abweichung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate ein Minimum wird:

$$\iint [F_{(x,y)} - \Sigma c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}]^2 \, dx\, dy = \text{Min} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (7).$$

Die Lösung befriedigt also die Randbedingungen, ohne streng die Differentialgleichung zu erfüllen.

Im Gegensatz dazu hat E. Trefftz in seinem Seminar für Technische Mechanik an der Technischen Hochschule zu Dresden vorgeschlagen, die Näherungslösung mit Funktionen $c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}$ zu entwickeln, welche die Differentialgleichung erfüllen und sich den Randbedingungen mit wachsendem ν nähern.

Hierzu zerlegen wir die Differentialgleichung vierter Ordnung $\Delta\Delta F = 0$ in zwei Gleichungen zweiter Ordnung

$$\Delta F = \Phi \qquad \text{und} \qquad \Delta\Phi = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8a, b).$$

Die Spannungsinvariante $\Phi = \sigma_x + \sigma_y$, oder auf Polarkoordinaten bezogen $\Phi = \sigma_r + \sigma_\vartheta$ ist nach (8b) eine Potentialfunktion und bedeutet am unbelasteten Innenrande der gelochten Scheibe mit $\sigma_r = 0$ unmittelbar die Tangentialspannung σ_ϑ. Wir begnügen uns daher in Zukunft mit der Kenntnis der Funktion Φ und approximieren diese durch $\sum_1^n c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}$, indem wir für $\varphi_{\nu(x,y)}$ Potentialfunktionen in r und ϑ einsetzen und die Koeffizienten c_ν durch die Bedingung bestimmen, daß das Fehlerquadrat Q ein Minimum sein soll, also:

$$Q = \iint \left[\Delta F - \sum_1^n c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}\right]^2 dx\, dy = \text{Min},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial c_h} = \iint \frac{\partial}{\partial c_h}\left[\Delta F - \sum_1^n c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}\right]^2 dx\, dy = 0,$$

$$\iint \left[\Delta F - \sum_1^n c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}\right] \frac{\partial}{\partial c_h}\left(\Delta F - \sum_1^n c_\nu \cdot \varphi_{\nu(x,y)}\right) dx\, dy = 0,$$

$$\sum_1^n c_\nu \iint \varphi_\nu \cdot \varphi_h \, dx\, dy = \iint \varphi_h \, \Delta F \, dx\, dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9).$$

Auf die rechte Seite der Gl. (9) wird der Greensche Satz in der Ebene angewendet

$$\iint (\varphi_h \, \Delta F - F \cdot \Delta\varphi_h)\, dx\, dy = \oint \left(\varphi_h \frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial \varphi_h}{\partial n}\right) ds \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

und dabei beachtet, daß $\iint F \cdot \Delta \varphi_h \, dx \, dy$ wegen $\Delta \varphi_h = 0$ verschwindet. Das Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten c_ν erhält dann nach (9) und (10) folgende Form:

$$\sum_1^n c_\nu \iint \varphi_\nu \varphi_h \, dx \, dy = \oint \left(\varphi_h \frac{\partial F}{\partial n} - F \cdot \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} \right) ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Dieser Ansatz dient zur Berechnung der Spannungen am Innenrande der zentrisch gelochten Quadratscheibe. Dabei werden der Nullpunkt des Koordinatensystems im Kreismittelpunkt und die Achsen x, y zu beiden Seiten parallel angenommen. Die Ränder $x = \text{const}$ erhalten eine gleichförmige, stetige Belastung q. Diese ist also zu beiden Achsen symmetrisch.

Als Funktionen φ_ν eignen sich

$$r^\nu \cos \nu \vartheta, \quad r^\nu \sin \nu \vartheta, \quad r^{-\nu} \cos \nu \vartheta, \quad r^{-\nu} \sin \nu \vartheta .$$

Läßt man die Achse $\vartheta = 0$ mit der x-Achse znsammenfallen, so scheiden infolge Symmetrie des Systems und der Belastung die antimetrischen Funktionen $r^\nu \sin \nu \vartheta$, $r^{-\nu} \sin \nu \vartheta$ und die Cosinusfunktionen mit ungeradem Vielfachen von ϑ aus. Es bleibt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi = c_1 + c_2 r^2 \cos 2\vartheta + c_3 r^4 \cos 4\vartheta + c_4 r^6 \cos 6\vartheta + c_5 r^8 \cos 8\vartheta \ldots \\ + c_6 r^{-2} \cos 2\vartheta + c_7 r^{-4} \cos 4\vartheta + c_8 r^{-6} \cos 6\vartheta + c_9 r^{-8} \cos 8\vartheta \ldots \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (12).$$

Die drei am Innenrande vorgeschriebenen Bedingungen liefern:

$$F = k_1 \cdot x + k_2 y + k_3 = \varrho \, k_1 \cos \vartheta + \varrho \cdot k_2 \sin \vartheta + k_3 ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dn} = k_1 \cdot \cos \vartheta + k_2 \cdot \sin \vartheta .$$

Die Funktionen φ_ν und $\partial \varphi_\nu / \partial n$ sind zu beiden Achsen x und y symmetrisch, $k_1 \cdot \cos \vartheta$ ist jedoch zur y-Achse und $k_2 \cdot \sin \vartheta$ zur x-Achse antimetrisch. Das Integral der Produkte aus symmetrischen und antimetrischen Funktionen ist Null. Ebenso liefert k_3 keinen Anteil F, da

$$k_3 \cdot \oint \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} \, ds = k_3 \, \varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial r} \, d\vartheta$$

für die gewählten Funktionen offensichtlich Null wird. Im Gegensatz zum Ritzschen Verfahren haben demnach bei dem Ansatz mit Potentialfunktionen die Konstanten k_1, k_2, k_3 keinen Einfluß auf die Bestimmung der Koeffizienten c_ν.

Trennt man im Ansatz (12) für Φ die zur Achse $\vartheta = \pi/4$ symmetrischen und antimetrischen Funktionen φ_ν und spaltet ebenfalls die in Abb. 1 angegebene Belastung in einen zur Achse $\vartheta = \pi/4$ symmetrischen und antimetrischen Teil (Abb. 4a, 5a), so können beide Gleichungssysteme unabhängig voneinander gelöst werden. Die Aufspaltung begrenzt die Integration auf den Bereich $0 < \vartheta < \pi/4$, erleichtert die Berechnung der Randintegrale für die vorgeschriebene Belastung und vermindert die Anzahl der unbekannten Größen c_ν eines Ansatzes.

$$\Phi_{\text{symm}} = c_1 + c_3 r^4 \cos 4\vartheta + c_5 r^8 \cos 8\vartheta + c_7 r^{-4} \cos 4\vartheta + c_9 r^{-8} \cos 8\vartheta \quad \ldots \quad (13\text{a})$$

$$\Phi_{\text{antim}} = c_2 r^2 \cos 2\vartheta + c_4 r^6 \cos 6\vartheta + c_6 r^{-2} \cos 2\vartheta + c_8 r^{-6} \cos 6\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (13\text{b}).$$

Analog der in der Baustatik bei Berechnung statisch unbestimmter Systeme gebräuchlichen Bezeichnungsweise werden die nur von den Näherungsfunktionen φ_ν, φ_h abhängigen Beiwerte Vorzahlen, die von φ_h und der Belastung abhängigen Beiwerte Belastungszahlen genannt.

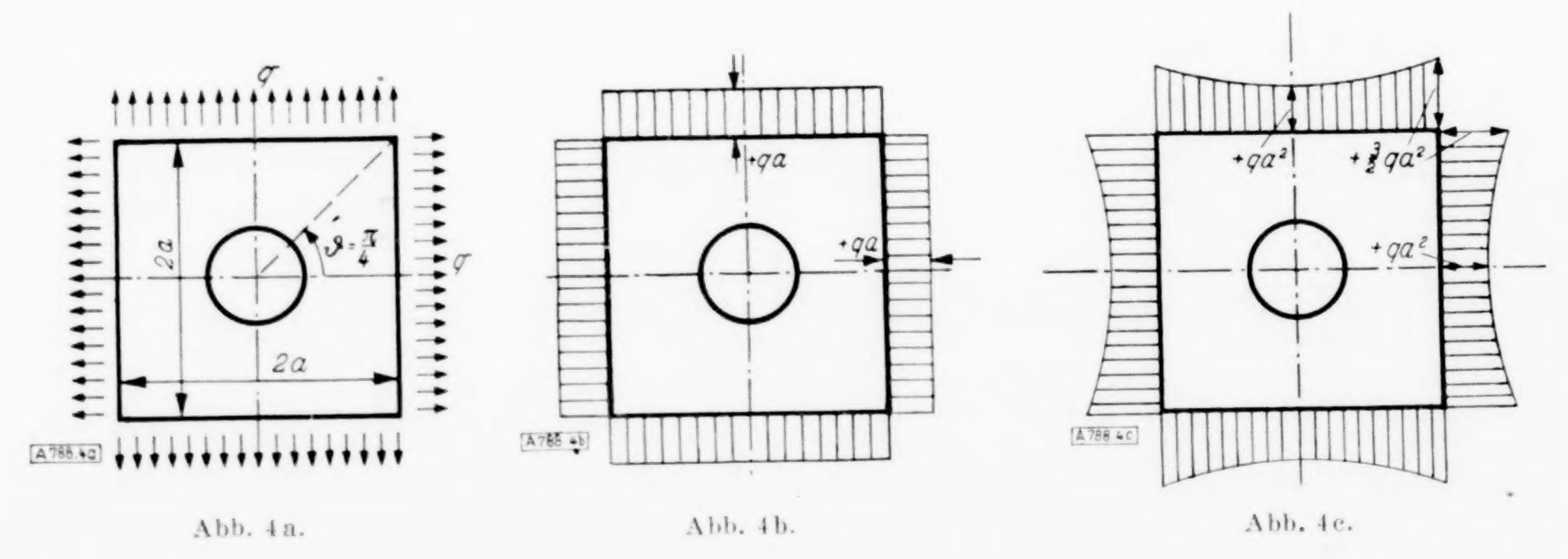


Abb. 4a. Abb. 4b. Abb. 4c.

Die Vorzahlen $a_{ik} = 1/2 \iint r^{\pm\mu\pm\nu} \cos\mu\vartheta \cos\nu\vartheta \, dx\, dy$ setzen sich aus Anteilen a_{ik}' des vollen Quadrates und Anteilen a_{ik}'' des Kreises zusammen. Für die Integration empfiehlt es sich, das Flächendifferential in r und ϑ auszudrücken. Mit $R = a/\cos\vartheta$ werden:

$$a_{ik} = a_{ik}' - a_{ik}'' = \frac{a^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\mu\vartheta\cos\nu\vartheta}{\cos^{\pm\mu\pm\nu+2}\vartheta}\, d\vartheta - \frac{\varrho^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2}\int_0^{\pi/4}\cos\mu\vartheta\cos\nu\vartheta\, d\vartheta \quad (14).$$

Für die zahlenmäßige Durchführung wird der Integrant in Potenzen von $\cos\vartheta$ ausgedrückt. Die Einzelintegrale ergeben sich aus den folgenden Rekursionsformeln:

$$\int \cos^n\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{n}\sin\vartheta\cos^{n-1}\vartheta + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\int \cos^n\vartheta\, d\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{(n-1)\cos^{n-1}\vartheta} + \frac{n-2}{n-1}\int\cos^{-n+2}\vartheta\, d\vartheta.$$

Zur Ermittlung der Belastungszahlen werden die am Umfang der Scheibe angreifenden Kräfte mit q bezeichnet, die Scheibendicke h ist 1. Damit werden die Randkräfte zu Randspannungen und lassen sich unmittelbar mit den Spannungen am Innenrande vergleichen.

Der Anfangspunkt der Integration nach (6b), (6c) hat die Koordinaten $x = a$, $y = 0$. Symmetrie und Antimetrie von System und Belastung werden weiterhin verwertet und daher die Teile der F- und $\partial F/\partial n$-Flächen ausgesiebt, die bei symmetrischer Belastung zu den Achsen $\vartheta = \pi/4$, $3\pi/4$ symmetrisch und bei antimetrischer Belastung hierzu antimetrisch sind. Die Integration erstreckt sich dann, ebenso wie bei den Vorzahlen, nur auf den Rand $x = a$, $0 < y < a$. Die Abbildungen 4a, b, c und 5a, b, c zeigen die Belastung mit den zugehörigen Flächen für F und $\partial F/\partial n$.

Symm. Belastung:

Am betrachteten Rande $x = a$, $0 \leq y \leq a$ ist

$$\partial F/\partial n = +q\cdot a, \qquad F = +\frac{q a^2}{2}\cdot\frac{\cos^2\vartheta + 1}{\cos^2\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots (15a).$$

Antim. Belastung:

Am betrachteten Rande $x = a$, $0 \leq y \leq a$ ist

$$\partial F/\partial n = -q\cdot a, \qquad F = -\frac{q a^2}{2}\cdot\frac{2\cos^2\vartheta - 1}{\cos^2\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots (15b).$$

Nunmehr sind nur noch die Funktionen φ_h der Näherungslösung und deren Ableitungen nach der Normalen am Rande $x = a$, $0 \leq y \leq a$ nötig. Diese sind mit $R = a/\cos\vartheta$, $\partial\varphi_h/\partial n = \partial\varphi_h/\partial x$; $ds = dy$ und

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_h}{\partial R}\cdot\frac{dR}{dx} + \frac{\partial\varphi_h}{\partial\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\partial\varphi_h}{\partial R}\cos\vartheta - \frac{\partial\varphi_h}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{a}$$

$$\varphi_h = a^{\pm\mu}\frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta} \quad \text{und} \quad \partial\varphi_h/\partial n = \mu\, a^{\pm\mu-1}\frac{\sin\mu\vartheta\cdot\sin\vartheta \pm \cos\mu\vartheta\cdot\cos\vartheta}{\cos^{\pm\mu-1}\vartheta} \quad \ldots\ldots (16a, b).$$

Die Belastungszahlen $a_{i0} = \frac{1}{8}\oint\left(\varphi_h\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\varphi_h}{\partial n}\right) ds$ ergeben sich nach (15) und (16) zu:

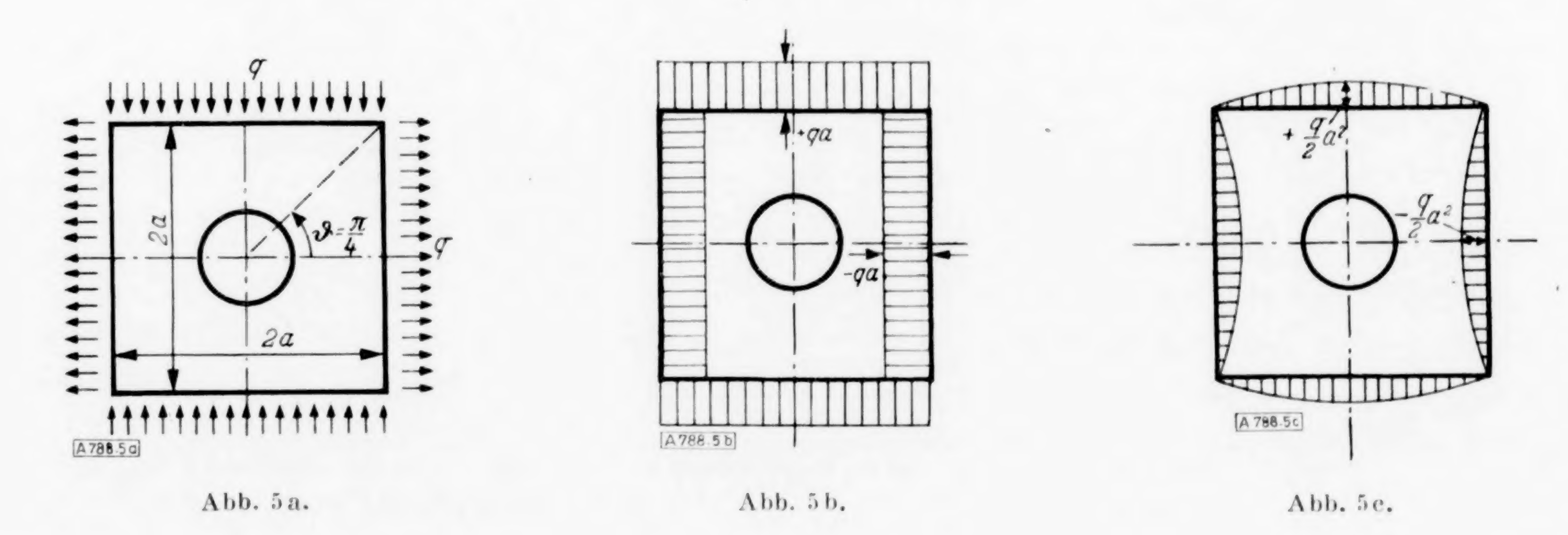


Abb. 5a. Abb. 5b. Abb. 5c.

$$\left.\begin{aligned} a_{i_0\,(\mathrm{symm})} = q\cdot a^{\pm\mu+2}\Bigg[\Big(1\mp\frac{\mu}{2}\Big)\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos\mu\,\vartheta}{\cos^{\pm\mu+2}\vartheta}\,d\,\vartheta-\frac{\mu}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\,\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+1}}\,d\,\vartheta\\ -\frac{\mu}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\,\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+3}\vartheta}\,d\,\vartheta\mp\frac{\mu}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos\mu\,\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta}\,d\,\vartheta\Bigg]\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;(17\text{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} a_{i_0\,(\mathrm{antim})} = q\cdot a^{\pm\mu+2}\Bigg[\Big(-1\mp\frac{\mu}{2}\Big)\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos\mu\,\vartheta}{\cos^{\pm\mu+2}\vartheta}\,d\,\vartheta+\mu\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\,\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+1}\vartheta}\,d\,\vartheta\\ -\frac{\mu}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\,\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+3}\vartheta}\,d\,\vartheta\pm\mu\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos\mu\,\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta}\,d\,\vartheta\Bigg]\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;(17\text{b}).$$

Hierbei gilt das obere Vorzeichen für positive, das untere für negative Exponenten μ. Die zahlenmäßige Auswertung der Vor- und Belastungszahlen, sowie die Auflösung der Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten c_ν ist für verschiedene Verhältnisse $\varrho : a$ durchgeführt worden. Danach ist:

Symmetrische Belastung q

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= a/8; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(2{,}028\,498 - 0{,}000\,707\cos 4\,\vartheta - 0{,}000\,000\cos 8\,\vartheta)\\ \varrho &= a/4; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(2{,}119\,101 - 0{,}011\,014\cos 4\,\vartheta - 0{,}000\,010\cos 8\,\vartheta)\\ \varrho &= 3\,a/8; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(2{,}289\,766 - 0{,}053\,591\cos 4\,\vartheta - 0{,}000\,237\cos 8\,\vartheta)\\ \varrho &= a/2; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(2{,}582\,663 - 0{,}164\,303\cos 4\,\vartheta - 0{,}002\,353\cos 8\,\vartheta)\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;(18\text{a}).$$

Antimetrische Belastung q

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= a/8; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(-\;\;4{,}241\,393\cos 2\,\vartheta - 0{,}000\,032\cos 6\,\vartheta)\\ \varrho &= a/4; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(-\;\;5{,}049\,468\cos 2\,\vartheta - 0{,}002\,175\cos 6\,\vartheta)\\ \varrho &= 3\,a/8; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(-\;\;6{,}725\,481\cos 2\,\vartheta - 0{,}027\,286\cos 6\,\vartheta)\\ \varrho &= a/2; & \Phi = \sigma_\vartheta &= q\,(-10{,}064\,653\cos 2\,\vartheta - 0{,}175\,777\cos 6\,\vartheta)\end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\;.\;(18\text{b}).$$

Nach der Zusammenstellung der Randspannungen σ_ϑ für verschiedene Verhältnisse von Lochdurchmesser zu Quadratseite ist bereits bei $\varrho = a/8$ eine gute Annäherung an die Lösung (1) für die unendliche Scheibe vorhanden, die bei dem symmetrischen Fall $\sigma_\vartheta = 2\,q$ und bei dem antimetrischen Fall $\sigma_\vartheta = 4\,q\cdot\cos 2\,\vartheta$ liefert. Die Werte der Reihenentwicklung (18a, b) sind bis zu $\varrho = a/2$ brauchbar. Sie muß jedoch für größere Bohrungen und zwar hauptsächlich bei antimetrischer Belastung mit Gliedern $c_{10}\cdot r^{10}\cdot\cos 10\,\vartheta$ und höheren Exponenten erweitert werden.

Die Abb. 6 zeigt die Randspannungen σ_ϑ bei Zugbelastung auf zwei gegenüberliegenden Seiten. Abb. 7 enthält einen Vergleich der Maximalspannungen mit den Nennspannungen

$$\sigma_n = \int\limits_0^a p\,d\,y : (a-\varrho)\,.$$

788

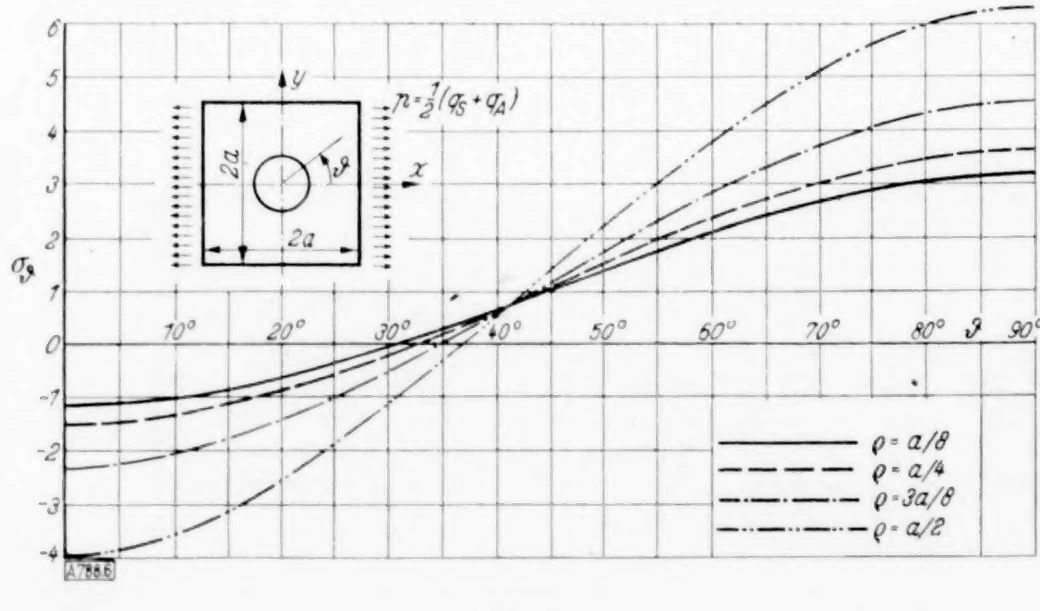




Abb. 6.

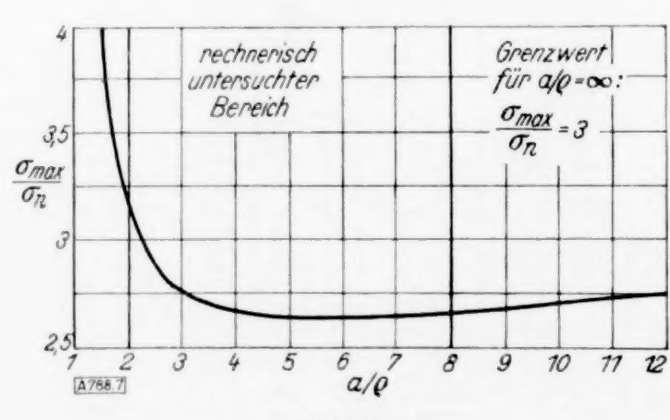


Abb. 7.

Eine praktische Anwendung der Analogie zwischen Überschallströmung in Gasen und überkritischer Strömung in offenen Gerinnen.

Von *Th. v. Kármán* in Pasadena.

1. Einleitung. Die hier mitgeteilten einfachen Berechnungen sind im Anschluß an eine rein praktische Frage entstanden. Die Wanderhöhung von gekrümmten Kanälen wird im allgemeinen so berechnet, daß man die Gleichgewichtslage für die mutmaßlich höchste Wassermenge unter Wirkung der Schwere und Zentrifugalkraft bestimmt. Das Hochwasseramt der Grafschaft Los Angeles fand, daß die so berechnete Erhöhung nicht ausreichte, insbesondere wenn nach starken Regengüssen, wie sie in Kalifornien im Winter oft vorkommen, große Wassermengen in kurzer Zeit abgeleitet werden müssen. Es wurde richtig vermutet, daß die anomale Erhöhung des Wasserspiegels in der Krümmung mit dem Auftreten überkritischer Geschwindigkeit zusammenhängt. Solche Geschwindigkeiten treten auf infolge des starken Gefälles, das bei den gegebenen topographischen Verhältnissen unvermeidlich ist. Es wurden Prof. R. T. Knapp und Dr. A. Ippen von dem California Institute of Technology beauftragt, Versuche über die Vorgänge in gekrümmten Modellkanälen auszuführen. In diesen Versuchen wurde zunächst die Wasseroberfläche für verschiedene Krümmungen und Gefälle, sowie die Geschwindigkeitsverteilung ausgemessen. Die Versuche wurden begonnen im Sommer 1935; ein vorläufiger Bericht erschien in den Transactions der amerikanischen geophysischen Union im Jänner 1936[1]).

Man fand, wie es zu erwarten war, ein System von Wellen, die sich über dem Kanal kreuzen und den Linien gleicher Höhe der Wasseroberfläche ein Aussehen verleihen, das den Druckverteilungsbildern, die man mit Hilfe der Schlierenmethode in Gasen erhält, sehr ähnelt.

Als es hieß, eine angenäherte theoretische Berechnung herzustellen, habe ich vorgeschlagen, die für Gasschwingungen bekannten Rechnungsmethoden sinngemäß anzuwenden. Die Analogie zwischen der zweidimensionalen Strömung eines Gases und der zweidimensionalen Wasserströmung in einem offenen Gerinne wurde meines Wissens zuerst von Jouguet angegeben. Die Analogie wurde weiter ausgearbeitet und weitgehend zu Untersuchungen von Gasströmungen benutzt von Riabouchinsky. Neuerdings hat Herr Preiswerk[2]) auf Anregung von Professor Ackeret die Analogie zur Untersuchung von Strömungen in Düsen angewendet. Mit Rücksicht darauf, daß der Gegenstand für Hydrauliker von Interesse sein dürfte, denen die Gesetze der Gasströmung weniger geläufig sind, werden die Gleichungen hier unmittelbar für den hydraulischen Fall abgeleitet.

2. Gleichungen für zweidimensionale reibungslose Strömung in offenen Kanälen. Wir betrachten zunächst einen Kanal mit waagerechter Sohle und vernachlässigen die Reibung der Flüssigkeit. Es sei angenommen, daß die Kanalbreite im Verhältnis zur Wasserhöhe groß ist, so daß die Strömung als zweidimensional betrachtet werden kann. Die Sohle liege in der xy-Ebene; dann ersetzen wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen, die in einer Normalen zur xy-Ebene liegen, durch einen Mittelwert. Die Komponenten der so definierten mittleren Geschwindigkeit in den x- und y-Richtungen seien v_x und v_y. Wenn die Wassertiefe mit h bezeichnet und h als Funktion von x und y betrachtet wird, kann die Kontinuitätsgleichung für die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in der Form

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\, v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h\, v_y) = 0 \qquad (1)$$

geschrieben werden.

Es sei weiterhin angenommen, daß die Beschleunigung der Flüssigkeit in der z-Richtung vernachlässigt werden und daher der Druck als eine lineare Funktion der z-Koordinate angesetzt werden kann: $p = p_0 + \varrho\, g\,(h - z)$, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit und p_0 den atmosphärischen Druck bezeichnen. Wir führen nun das Integral $\int_0^h (p - p_0)\, dz = P = \varrho\, g \frac{h^2}{2}$ als die

[1]) A. T. Ippen and R. T. Knapp: A study of high velocity flow in curved channels. Der vollständige Bericht ist als Doktorarbeit des Herrn A. Ippen bei der Bibliothek des Cal. Institute of Technology erhältlich.

[2]) Schweizerische Bauzeitung 1937, S. 237.

Druckkraft für die Längeneinheit ein. Alsdann können wir die Bewegungsgleichungen der zweidimensionalen Strömung in der Form

$$\varrho h a_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \varrho h a_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ansetzen; a_x und a_y sind die Komponenten der mittleren Beschleunigung in der x- und y-Richtung, gegeben durch

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, \qquad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir wollen uns nun auf stationäre Strömungen beschränken, die aus einer Parallelströmung hervorgehen. Dann gilt infolge der Reibungs- und Wirbelfreiheit die Bernoullische Gleichung für jede Stromlinie mit der identischen Bernoullischen Konstante oder Gesamtenergie H:

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2g} + h = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wenn wir nun die Kontinuitätsgleichung (1) für stationäre Strömung in der Form schreiben

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{h}\left(v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und aus (4) $\frac{\partial h}{\partial x}$ und $\frac{\partial h}{\partial y}$ berechnen und in (5) einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_x^2}{g h}\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{v_x v_y}{g h}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{v_y^2}{g h}\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Nun ist die Größe $\sqrt{g h}$ gleich der Schwellgeschwindigkeit c, d. h. der Geschwindigkeit, mit welcher eine geringe Erhöhung des Flüssigkeitsspiegels in einem seichten Kanal fortschreitet. Wir können daher (6) schreiben:

$$\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{v_x v_y}{c^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Differentialgleichung für die zweidimensionale Strömung eines kompressiblen Gases, wenn die Schwellgeschwindigkeit durch die Schallgeschwindigkeit ersetzt wird. Um die Analogie zu vervollständigen, muß ϱh durch die Dichte des Gases, P durch den Gasdruck ersetzt und das Verhältnis der spezifischen Wärmen gleich $\varkappa = 2$ gesetzt werden.

3. Annäherung für „niedrige Wellen". Bevor wir zur Anwendung von Gl. (7) übergehen, soll die linearisierte Gleichung für den Fall kleiner Abweichungen von einer Parallelströmung in einem geraden Kanal von konstanter Breite angeschrieben werden. In diesem Fall erhalten wir eine Gleichung für die Größe h, die am leichtesten der Beobachtung zugänglich ist.

Wir betrachten eine parallele Grundströmung in einem weiten geraden Kanal von konstanter Breite, die dieser Grundströmung entsprechende Wassertiefe soll mit h_0, die mittlere Geschwindigkeit mit U bezeichnet werden. Dann sind die Beschleunigungskomponenten im Falle einer stationären Strömung, die nur wenig von der Grundströmung abweicht, angenähert gleich

$$a_x = U\frac{\partial v_x'}{\partial x}, \qquad a_y = U\frac{\partial v_y'}{\partial x}, \qquad \text{wobei} \qquad v_x = U + v_x', \qquad v_y = v_y'$$

gesetzt und Glieder zweiter Ordnung in v_x' und v_y' vernachlässigt wurden. Fernerhin setzen wir $h = h_0 + h'$. Die Gleichungen (2) lauten mit derselben Annäherung

$$U\frac{\partial v_x'}{\partial x} = -g\frac{\partial h'}{\partial x}, \qquad U\frac{\partial v_y'}{\partial x} = -g\frac{\partial h'}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$h_0\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y}\right) + U\frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Wir differenzieren (9) nach x und eliminieren die Geschwindigkeitskomponenten mit Hilfe von (8). Dann erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \left(\frac{U^2}{g h_0} - 1\right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Wie bekannt, hat diese Gleichung den Charakter der Potentialgleichung, wenn $\frac{U^2}{g h_0} < 1$ und den Charakter der Wellengleichung, wenn $\frac{U^2}{g h_0} > 1$. Für diesen zweiten Fall schreiben wir $\frac{U^2}{g h_0} - 1 = \beta^2$; die Größe β ist dann der Kotangens des Machschen Winkels α, d. h. des Winkels, den die Wellenlinien und die Stromlinien der Grundströmung einschließen. Die Gl. (10) lautet dann

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Nehmen wir an, daß die Spiegelhöhe h in dem Eingangsquerschnitt $x = 0$ „gestört“ ist, so daß z. B. in einem Punkte $x = 0$, $y = \eta$, $h' = f(\eta)$ ist. Dann können wir die Höhenverteilung stromabwärts im Kanal dadurch bestimmen, daß wir je die halbe Störung $\frac{1}{2} f(\eta)$ längs der zwei Machschen Geraden unverändert fortschreiten lassen und die so erhaltenen Störungen addieren. An der Seitenwand des Kanals gilt $v_y' = 0$, daher wegen (8) $\frac{\partial h'}{\partial y} = 0$; d. h. die Störung wird an den Seitenwänden unverändert reflektiert.

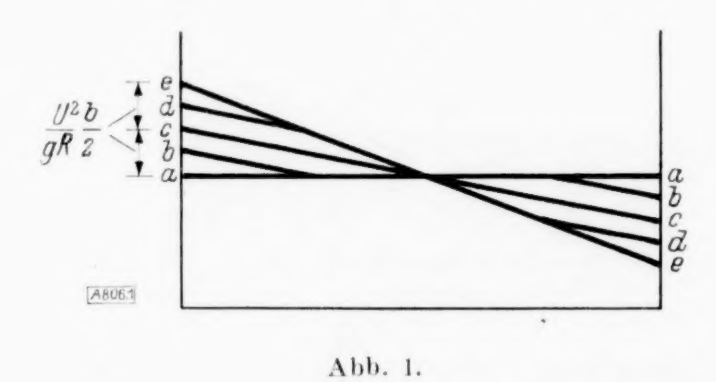


Abb. 1.

Diese Feststellungen genügen, um den Vorgang beim Übergang von einem geraden zu einem schwach gekrümmten Kanal qualitativ zu beschreiben. Den gekrümmten Kanal mit dem Krümmungshalbmesser R können wir durch einen geraden Kanal ersetzt denken, in welchem die Schwerkraft unter einem Winkel δ gegen die Vertikale geneigt ist, wobei δ durch die Beziehung $\operatorname{tang} \delta = \frac{U^2}{g R}$ bestimmt ist. Wir können uns daher die Grundströmung mit einer Wasserspiegelfläche denken, die um den Winkel δ gegen die Horizontale geneigt ist. Wenn δ klein ist, gilt die Gl. (11) unverändert, nur daß h' jetzt die Abweichung von der schiefen Wasseroberfläche bedeutet. Im Eingangsquerschnitt ist die Wasseroberfläche horizontal; die Strömung fängt also in $x = 0$ mit einer linearen Störungsfunktion $h' = f(\eta)$ an. Die oben angedeutete Konstruktion gibt dann die in Abb. 1 dargestellte Spiegelhöhenverteilung, und es ist leicht zu sehen, daß die maximale Erhöhung an der äußeren Seitenwand in der Distanz $x = b\beta$ vom Eingangsquerschnitt stromabwärts auftritt und den doppelten Wert der statischen Erhöhung $\frac{b}{2} \frac{U^2}{g R}$ annimmt.

Denselben Vorgang können wir auch anders beschreiben. Wir ersetzen den leicht gekrümmten Kanal durch einen geraden und nehmen an, daß von dem Querschnitt $x = 0$ an die Flüssigkeit außer der Schwerkraft einer Seitenkraft unterworfen ist, welche wir angenähert gleichmäßig verteilt denken und deren Größe für die Masseneinheit der Flüssigkeit gleich $\frac{U^2}{R}$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Falle (im allgemeinen für Kräfte, die ein Potential besitzen) die Gl. (11) unverändert bestehen bleibt, aber die Randbedingung an den Seitenwänden sich ändert. Die zweite der Gl. (8) lautet in diesem Falle

$$U \frac{\partial v_y}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial y} + \frac{U^2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

so daß an den Wänden wegen $v_y = 0$ die Bedingung $\frac{\partial h'}{\partial y} = \frac{U^2}{R g}$ gilt. Dann können wir der Gl. (11) die folgende einfache Deutung geben:

Wir führen die Zeit $t = \frac{x}{U}$ ein, in welcher die Flüssigkeit den Weg x in der Richtung der Grundströmung zurücklegt. Gl. (11) lautet dann

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} = \left(\frac{\beta}{U}\right)^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

Diese Gleichung sehen wir als die Schwingungsgleichung für eine Flüssigkeitsmasse an, die zwischen zwei parallelen Wänden $y = \pm \frac{b}{2}$ eingeschlossen ist, und die zur Zeit $t = 0$ plötzlich unter die Wirkung einer konstanten, in der y-Richtung wirkenden Beschleunigung gesetzt wird. Die zeitliche Änderung der Oberfläche der schwingenden Flüssigkeitsmasse entspricht den stromabwärts aufeinanderfolgenden Flüssigkeitsprofilen. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Störung in der y-Richtung muß gleich $\frac{U}{\beta} = \frac{c}{\cos a}$ gesetzt werden, wobei $c = \sqrt{g h_0}$ und $\sin a = \frac{c}{U}$ ist. Wir werden sehen, daß diese Vorstellung besonders geeignet ist, die Dämpfung der Wellen längs des Kanales darzustellen.

4. Die Oberflächenerhöhung längs der Wände nach der exakten Theorie der reibungsfreien Strömung. Wir kehren zu den exakten Gleichungen zurück, und leiten zunächst eine Gleichung für die Erhöhung der Wasseroberfläche längs der Seitenwände ab, gültig für den Bereich, bevor die gegenseitige Beeinflussung der beiden Wände beginnt.

Die einfachste Betrachtung, die zu einer Integration der exakten Gl. (1) bis (4) führt, schließt sich an den linearisierten Fall an. Für einen infinitesimalen Bereich müssen die Verhältnisse denen, die durch die linearisierte Gleichung dargestellt werden, ähnlich sein, d. h. eine infinitesimale Störung schreitet auch in diesem Falle unverändert fort längs der zwei Wellenlinien; nur sind dann die letzteren im allgemeinen gekrümmt und der Machsche Winkel a wird nicht zwischen der Wellenlinie und der x-Achse, sondern zwischen der Wellenlinie und der wirklichen Stromlinie auftreten. Auch ist der Winkel a im allgemeinen veränderlich, da seine Größe durch $\sin a = \frac{c}{v}$ bestimmt ist, wobei sowohl $c = \sqrt{g h}$ als $v = \sqrt{2 g (H - h)}$ im allgemeinen veränderlich sind.

Nehmen wir nun an, daß im Eingangsquerschnitt $h = h_0 =$ const gilt und die Geschwindigkeitskomponenten $v_x = v_0$, $v_y = 0$ sind. Dann sind zunächst die Wellenlinien, die von den Punkten dieses Querschnittes ausgehen, gerade und unter dem Winkel $a_0 = \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{g h_0}}{v_0}$ zur x-Achse geneigt. Für das Dreieck ABC in Abb. 2 gilt deswegen $h = h_0$ und die Geschwindigkeit behält ihre Größe und Richtung. An beiden Seiten des Dreiecks ändert sich Höhe und Geschwindigkeit infolge des Einflusses, der von den Wänden ausgeht. Nehmen wir an, daß an der Wand eine Änderung der Oberfläche um Δh auftritt, dann schreitet diese Störung nach dem oben Gesagten längs der Wellenlinie, die von der Wand unter dem Machschen Winkel a ausgeht, unverändert fort. Diese Wellenlinien sind in diesem Falle Linien gleicher Höhe, weil die zweite Schar von Wellenlinien, die von dem Dreieck ABC ausgehen, die Störung null tragen. Nun erfolgt die Beschleunigung der Flüssigkeit zufolge Gl. (2) in der Richtung des Gradienten von h, folglich muß die Beschleunigung senkrecht zu der von der Wand ausgehenden Wellenlinie stehen.

Diese Bedingung läßt sich sehr leicht mathematisch ausdrücken. Es sei Θ die Ablenkung der Stromlinie von der ursprünglichen Richtung, die Geschwindigkeit sei gleich v. Dann sind die beiden Komponenten der Beschleunigung $\frac{d v}{d t}$ in der tangentialen und $v \frac{d\Theta}{d t}$ in der normalen Richtung. Da die Wellenlinie mit der Geschwindigkeitsrichtung den Winkel a einschließt und die Beschleunigung senkrecht zur Wellenlinie ist, so ist der Winkel zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung $90^\circ + a$. Bezeichnen wir die Größe der Beschleunigung mit a, so werden die beiden Komponenten gleich

$$\frac{d v}{d t} = a \cos (90^\circ + a) = -a \sin a \quad \text{und} \quad v \frac{d\Theta}{d t} = a \sin (90^\circ + a) = a \cos a .$$

Folglich ist

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{1}{v}\frac{d v}{d \Theta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Nun ist $\frac{v^2}{2g} + h = H$ und daher

$$\frac{d h}{d \Theta} = -\frac{v}{g}\frac{d v}{d \Theta} = \frac{v^2}{g} \operatorname{tang} \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Diese Gleichung kann man auch unmittelbar einsehen, indem man die Änderung $g \Delta h$, die einer kleinen Abweichung $\Delta \Theta$ der Geschwindigkeitsrichtung entspricht, gleich der Änderung des Impulses normal zur Wellenlinie setzt.

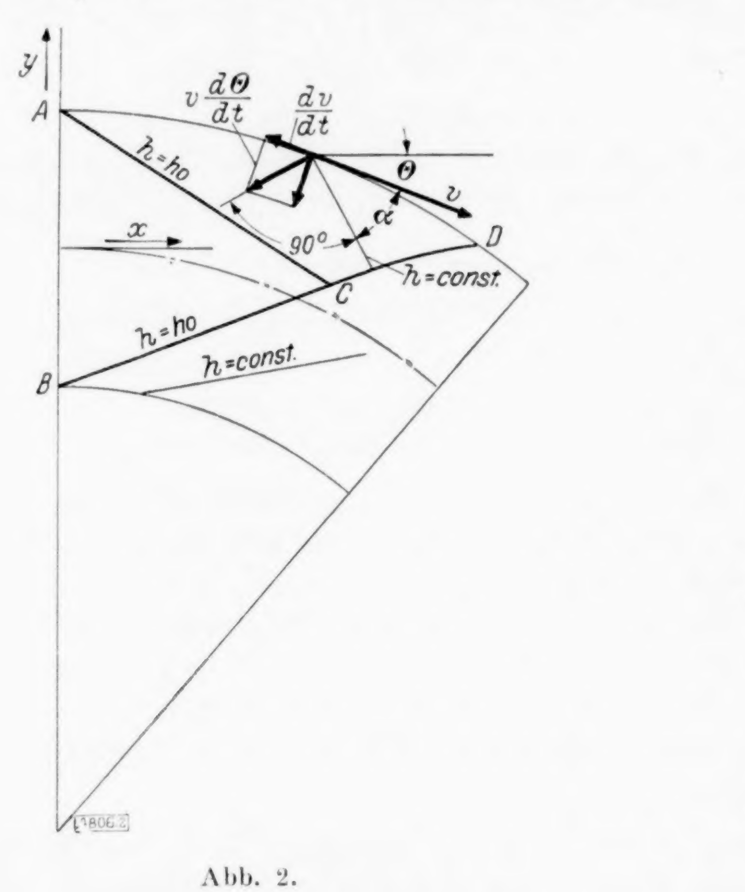


Abb. 2.

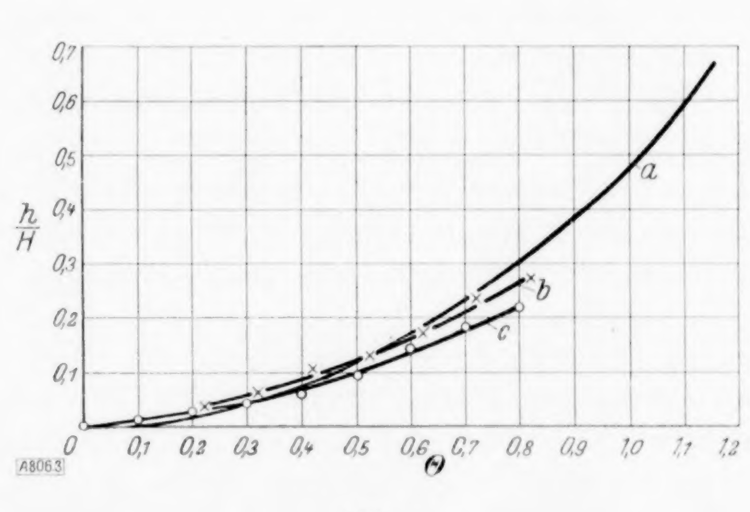


Abb. 3.

Gl. (15) ist die Grundgleichung zur Berechnung der Änderung der Spiegelhöhe entlang der Wand. Führen wir in (15)

$$\frac{v^2}{2g} = H - h, \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sqrt{g h}}{\sqrt{v^2 - g h}} = \sqrt{\frac{h}{2H - 3h}}$$

ein, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d h}{d \Theta} = \frac{2(H-h)\sqrt{h}}{\sqrt{2H - 3h}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

die sich elementar integrieren läßt.

Zunächst erhalten wir eine sehr einfache Näherungsformel für den Fall, daß $h \ll H$ oder $v \gg c$. Vernachlässigen wir h neben H, so wird (16)

$$\frac{d h}{d \Theta} = \sqrt{2 H h} \quad \text{und} \quad \sqrt{h} = \sqrt{h_0} + \sqrt{\frac{H}{2}}\, \Theta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Die genaue Integration von (16) führt zu

$$\Theta = \sqrt{3} \arcsin \sqrt{\frac{h}{\frac{2}{3} H}} - \arcsin \sqrt{\frac{h}{2(H-h)}} + \text{const} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

oder

$$\Theta + \alpha = \sqrt{3} \arcsin \sqrt{\frac{h}{h_{cr}}} + \text{const} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19),$$

wobei $h_{cr} = \frac{2}{3} H$ die Grenzwassertiefe bedeutet, d. h. die Wassertiefe, für welche die Geschwindigkeit gleich der Schwellgeschwindigkeit ist.

Nehmen wir an, daß für $\Theta = 0$, $a = a_0$, $h = h_0$ ist, dann ist

$$\Theta + a = \sqrt{3}\left(\arcsin\sqrt{\frac{h}{h_{cr}}} - \arcsin\sqrt{\frac{h_0}{h_{cr}}}\right) + a_0 ,$$

und man sieht, daß für $\Theta = a_0 - \sqrt{3}\arcsin\sqrt{\frac{h_0}{h_{cr}}}$, $h = 0$, $a = 0$ wird. Der so erhaltene negative Wert von Θ ist die Ablenkung, für welche an der inneren Krümmerwand die Strömung die Wand verläßt. Eine größere Ablenkung der Flüssigkeit ist nicht tunlich. In der Abb. 3 ist die Kurve

$$\Theta = \sqrt{3}\arcsin\sqrt{\frac{h}{\frac{2}{3}H}} - \arcsin\sqrt{\frac{h}{2(H-h)}}$$

dargestellt (Kurve a). Wenn wir von einem beliebigen Werte von Θ_0, h_0 ausgehen, geben die Werte h/H für wachsendes Θ die Wasserspiegelerhöhung längs der äußeren, die Werte für abnehmendes Θ den Abfall der Wasseroberfläche längs der inneren Wand an. $\Theta = (\sqrt{3} - 1)\frac{\pi}{2}$ entspricht dem Unterschreiten der kritischen Geschwindigkeit. Dieser Winkel stellt die größtmögliche Ablenkung von der kritischen Geschwindigkeit bis zur Höchstgeschwindigkeit $\sqrt{2gH}$ dar. Die entsprechenden Beziehungen sind für den Fall der Gasströmung mit Überschallgeschwindigkeit von L. Prandtl ungefähr vor dreißig Jahren diskutiert worden.

Wenn man die nach Gl. (18) sich ergebenden Werte mit den Versuchsergebnissen vergleicht, findet man, daß die Gleichung sowohl die Flüssigkeitsspiegelerhöhung an der äußeren als die Senkung an der inneren Wand etwas überschätzt. In Abb. 3 sind auch einige gemessene Kurven b und c nach den Versuchen des Herrn Ippen zum Vergleich eingetragen. Der gemeinsame Punkt der experimentellen und der theoretischen Kurve (bei $\Theta \approx 0{,}52$ bzw. 0,3) entspricht dem Eingangsquerschnitt; die Höhen, die an der äußeren Wand gemessen wurden, sind an dem von diesem Anfangspunkt aufsteigenden, die an der inneren Wand gemessenen an dem absteigenden Ast der Kurven eingetragen.

Die Gültigkeit der Formel (18) hört in dem Punkte auf, in welchem die erste Wellenlinie, die von einer Wand ausgeht, die entgegengesetzte Wand trifft. Ich glaube, es wäre wenigstens von theoretischem Interesse, die Berechnung mit Hilfe der von Prandtl und Busemann ausgearbeiteten Hodographenmethode weiter fortzusetzen, trotz der erwähnten Abweichung, über deren mutmaßlichen Grund wir im nächsten Paragraphen einige Betrachtungen anstellen wollen. Allerdings ist die Berechnung dadurch erschwert, daß in der Nähe der inneren Wand offenkundig ein Stoß entsteht. Dies ist schon daraus zu ersehen, daß die von der äußeren Wand ausgehenden Wellenlinien sich überschneiden. Doch unter Benutzung der Stoßbedingungen, die leicht aufzustellen sind, oder der sog. „Stoßpolare" kann die Stoßlinie und das Stromlinienbild konstruiert werden, ähnlich wie es Herr Preiswerk für eine Strömung durch einen düsenförmigen Kanal durchgeführt hat.

5. Einfluß des Gefälles und der Sohlenreibung. In den bisherigen Berechnungen wurde horizontale Sohle und Reibungsfreiheit angenommen. Es scheint jedoch, daß die systematische Abweichung zwischen den berechneten und den gemessenen Wasserspiegelkurven mit dieser Vernachlässigung zusammenhängt. Es ist nämlich klar, daß das Gleichgewicht zwischen der Schwerkraftskomponente in der Bewegungsrichtung und der Reibung im Krümmer gestört ist. In dem Bereich, in dem die Flüssigkeit durch die Ablenkung verlangsamt und die Spiegelhöhe gehoben wird, überwiegt die Schwerewirkung gegenüber der Reibung, während in dem Bereich, wo der Wasserspiegel sinkt, die Reibung relativ größer wird. In dem eindimensionalen Falle läßt sich das durch folgende einfache Rechnung zeigen:

Nehmen wir an, daß die Sohlenreibung für die Flächeneinheit der benetzten Sohle $c_f \frac{\varrho v^2}{2}$ beträgt, wobei die Reibungszahl c_f angenähert als ein konstanter Wert angesetzt werden kann. Fernerhin nehmen wir an, daß die Reibung an den Seitenwänden wegen der großen Breite des Kanals vernachlässigt werden kann. Dann ist die Schwerkraftskomponente im Gleichgewicht mit der Reibung, wenn das Gefälle gleich ist

$$s = c_f \frac{v_0^2}{2 g h_0} \qquad (19).$$

Wenn nun h und v veränderlich sind, so sagt die **Bernoullische** Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}+h\right)=s-c_f\frac{v^2}{2gh}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}+h\right)=s\left(1-\frac{v^2 h_0}{v_0^2 h}\right)$$

und mit

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{gh}}{v},\qquad \sin\alpha_0=\frac{\sqrt{gh_0}}{v_0}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}+h\right)=s\left(1-\frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\alpha}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(20).$$

Wenn daher $\alpha>\alpha_0$ findet Energiezufuhr, wenn $\alpha<\alpha_0$ Energieverlust statt.

In dem zweidimensionalen Falle können wir dementsprechend annehmen, daß an einem beliebigen Punkte der Sohle eine Reibungskraft in der zur resultierenden Geschwindigkeit entgegengesetzten Richtung wirkt, welche eine tangentielle Beschleunigung von der Größe $-gs\frac{\sin^2\alpha_0}{\sin^2\alpha}$ der Flüssigkeit erteilt, während die Schwerkraft eine Beschleunigung gs in der Richtung des Gefälles erzeugt. Dabei wurde angenommen, daß das Gefälle s konstant bleibt. Die Rechnung ist jedoch leicht auf den Fall veränderlichen Gefälles auszudehnen.

Die Integration der exakten Gleichungen, einschließlich Reibungskraft, ist sehr kompliziert, da die Reibungskräfte kein Potential besitzen. Demzufolge wollen wir uns auf den Fall kleiner Störungen, d. h. linearisierter Gleichungen beschränken. Eine genauere Rechnung ist auch aus dem Grund kaum tunlich, da die Vernachlässigung der Reibung an der Seitenwand im Falle sehr starker Spiegelerhöhung an der Wand wohl kaum erlaubt ist.

In dem linearisierten Fall sind die zusätzlichen Beschleunigungskomponenten: in der x-Richtung $sg\left(\frac{h'}{h_0}-\frac{2v_x'}{U}\right)$ und in der y-Richtung $-sg\frac{v_y'}{U}$. Folglich lauten die Gl. (8)

$$U\frac{\partial v_x'}{\partial x}=-g\frac{\partial h'}{\partial x}+gs\frac{h'}{h_0}-gs\frac{2v_x'}{U},\qquad U\frac{\partial v_y'}{\partial x}=-g\frac{\partial h'}{\partial y}-gs\frac{v_y'}{U}\quad\ldots\quad(21)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$h_0\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x}+\frac{\partial v_y'}{\partial y}\right)+U\frac{\partial h'}{\partial x}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(22).$$

Wenn wir die Geschwindigkeitskomponente v_y' eliminieren, erhalten wir die folgende Gleichung

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2}=\frac{U^2}{gh_0}\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}+\frac{2s}{h_0}\frac{\partial h'}{\partial x}-\frac{s}{U}\frac{\partial v'}{\partial x}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(23),$$

welche zusammen mit der ersten der Gl. (21) h' und v_x' bestimmt. Wir könnten nun eine dieser Variablen eliminieren, indessen ziehen wir vor, die relative Größe der beiden letzten Glieder in (23) abzuschätzen und eine angenäherte Gleichung zu benutzen. Wenn wir $\frac{\partial v_x'}{\partial x}$ aus (21) mit vernachlässigtem Reibungseinfluß entnehmen, gilt $\frac{\partial v_x'}{\partial x}=-\frac{g}{U}\frac{\partial h'}{\partial x}$, folglich ist das letzte Glied in (23) angenähert gleich $s\frac{g}{U^2}\frac{\partial h'}{\partial x}$. Nun ist in den meisten praktischen Fällen $\frac{U^2}{gh_0}\gg 1$, so daß das letzte Glied im Vergleich zum vorangehenden $\frac{2s}{h_0}\frac{\partial h'}{\partial x}$ ohnehin klein ist. Daher setzen wir für das letzte Glied den angenäherten Wert ein und erhalten (23) in der Form

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial y^2}=\beta^2\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}+\varkappa\frac{\partial h'}{\partial x}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(24),$$

wobei $\beta^2=\frac{U^2}{gh_0}-1$ und $\varkappa=\frac{2s}{h_0}\left(1+\frac{gh_0}{2U^2}\right)$ beträgt. In den meisten Fällen wird es genügen, $\varkappa=\frac{2s}{h_0}$ zu setzen.

Gl. (24) hat den Charakter der Telegraphengleichung. Wenn wir zu unserer früheren Analogie zurückkehren und die Zeit $t = \frac{x}{U}$ einführen, so stellt Gl. (24) die Schwingungsgleichung einer Flüssigkeitsmasse unter Annahme einer der Schwingungsgeschwindigkeit proportionalen Dämpfung dar. Folglich müssen wir stromabwärts gedämpfte Wellenberge und -täler erhalten. Dies ist auch im allgemeinen der Fall.

Die Telegraphengleichung kann in verschiedener Weise integriert werden. Wenn wir für $x = 0$ eine Anfangsstörung der Form $h' = f(y) = \Sigma a_n \cos \frac{n y \pi}{b}$ annehmen und an den Wänden $\frac{\partial h'}{\partial y} = 0$ ansetzen, so wird die Lösung

$$h' = \Sigma a_n e^{-\frac{\varkappa x}{2 \beta^2}} \left[\cos x \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{b^2 \beta^2} + \frac{\varkappa^2}{4 \beta^4}} + \sin x \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{b^2 \beta^2} + \frac{\varkappa^2}{4 \beta^4}}\right] \cos \frac{n \pi y}{b} \quad . \; . \; (25).$$

Der Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{\varkappa x}{2 \beta^2}}$ oder angenähert $e^{-\frac{s x}{\beta^2 h_0}}$ zeigt, daß im allgemeinen die Wellen in einem Kanal mit starkem Gefälle stärker gedämpft werden. Dies wird auch durch die Versuche bestätigt. Ein quantitativer Vergleich für relativ niedrige Wellen wäre erwünscht. Das vorhandene Versuchsmaterial bezieht sich meistens auf Fälle, in denen die Wellenhöhen von derselben Ordnung oder größer sind als die Anfangstiefe h_0.

Wenn man Gl. (24) für den Bereich zwischen der Wand und der von der Ecke des Eintrittsquerschnittes ausgehenden Wellenlinie integrieren will, führt die Riemannsche Methode zu einem relativ einfachen Ergebnis. Die Lösung, für welche an der Wand, d. h. $y = \frac{b}{2}$, $\frac{\partial h'}{\partial y} = \frac{U^2}{g R}$ und längs der Wellenlinie $x = \beta\left(\frac{b}{2} - y\right)$ die Erhöhung $h' = 0$ ist, lautet mit $y' = \frac{b}{2} - y$

$$h'(x, y') = e^{-\frac{\varkappa x}{2 \beta^2}} \frac{U^2}{g R} \int_0^{\frac{x}{\beta} - y'} \Im\left(\frac{\varkappa i}{2 \beta} z\right) d\xi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26),$$

wobei die Variable $z = \sqrt{\left(\frac{x - \xi}{\beta}\right)^2 - y'^2}$ ist und $\Im\left(\frac{\varkappa i z}{2 \beta}\right)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung des imaginären Argumentes $\frac{\varkappa z}{2 \beta} i$ bezeichnet. Es ist

$$\Im(i \zeta) = 1 + \frac{\zeta^2}{2^2} + \frac{\zeta^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{\zeta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots .$$

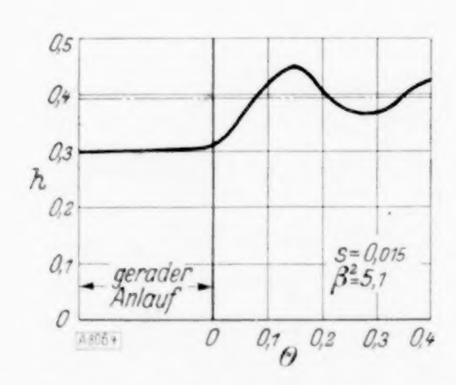


Abb. 4.

In der Formel (26) erscheint wieder der Dämpfungsfaktor $e^{-\frac{\varkappa x}{2 \beta^2}}$. Die Kurve in Abb. 4 stellt den Höhenverlauf des Wasserstandes dar, längs der äußeren Wand eines Kanals von einem Fuß Breite und zehn Fuß Krümmungshalbmesser. Die „Gleichgewichtshöhe" ist durch die strichpunktierte Linie angegeben. Die Dämpfung ist stärker, als sich nach Gl. (25) ergibt, vielleicht wegen der endlichen Wellenhöhe oder weil die Wandreibung vernachlässigt wurde.

Ich glaube, daß die hier entwickelten Methoden in manchen anderen hydraulischen Problemen Anwendung finden dürften. 806

Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode.[*]

Von *K. Marguerre* in Berlin-Adlershof.

1. Einleitung. Der Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz sagt: Ein elastischer Körper kann unter ein und derselben äußeren Belastung eine und nur eine Gleichgewichtslage annehmen. In der Formulierung der energetischen Betrachtungsweise: das Potential Π der inneren und äußeren Kräfte hat eine und nur eine Extremalstelle

$$\delta \Pi = 0 \quad \quad (1.1)$$

und der Extremwert ist ein Minimum[1]).

Der Eindeutigkeitssatz gilt unbeschränkt im Bereiche der linearisierten Elastizitätstheorie, d. h., solange die Spannungen σ, τ durch die Verzerrungen γ_{ik} und die Verzerrungen wieder durch die Verschiebungen u, v, w linear ausgedrückt werden können. Dann wird nämlich die Funktion Π in den Verschiebungen von höchstens dem zweitem Grade, und die geometrische Anschauung bestätigt unmittelbar, daß eine „Parabel" zweiten Grades (positiv definite quadratische Form) eine und nur eine Minimalstelle (mechanisch gesprochen: Gleichgewichtslage) besitzen kann. Die Sachlage wird eine andere, wenn man zur Untersuchung von Gebilden übergeht, deren Verhalten durch die linearisierten Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen nicht mehr mit genügender Genauigkeit erfaßt wird. Es sind dies in erster Linie Körper, bei denen eine der Abmessungen klein ist gegen die übrigen, also schalen-, platten- oder stabförmige Gebilde. Ein Stab z. B. kann, ohne daß dabei die Spannungen die Proportionalitätsgrenze zu überschreiten brauchen, Ausbiegungen erleiden, welche die Dicke um ein Vielfaches übertreffen, und unter diesen Umständen sind in den Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen die Quadrate der (Quer-)Verschiebungen durchaus nicht mehr klein gegen die linearen Anteile. Damit aber wird die Formänderungsenergie bzw. das Potential Π von höherem als dem zweiten Grade in den Verschiebungen, und eine „Parabel" höherer Ordnung kann natürlich mehrere Extrema (mechanisch: Gleichgewichtslagen) besitzen.

Die Aufgabe der (üblichen) Stabilitätstheorie ist die Bestimmung derjenigen Systeme der äußeren Belastung, unter denen mehrere benachbarte Gleichgewichtslagen möglich sind („Verzweigungs"-Stellen des elastischen Gleichgewichts). Der Grund, die Untersuchung auf diese „kritischen" Punkte zu beschränken, liegt darin, daß die Differentialgleichungen, die das elastische Verhalten im überkritischen Bereich kennzeichnen, im allgemeinen nicht mehr linear und einer analytischen Behandlung daher nur schwer zugänglich sind, während am Verzweigungspunkte selbst das Problem sich noch „linearisieren" läßt[2]).

Dieser rein praktische Gesichtspunkt hat aber auch zu einer gewissen (wie wir zeigen wollen: unbegründeten) systematischen Abtrennung der Stabilitätsprobleme von den übrigen Problemen der Elastizitätstheorie geführt, die ihren mathematischen Ausdruck meist in einer von der üblichen etwas abweichenden Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen findet — gelegentlich auch schon zur Formulierung eines besonderen Prinzips geführt hat[3]).

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen sagt — in seiner in der Elastizitätstheorie üblichen Fassung — aus, daß bei einer virtuellen (d. h. geometrisch möglichen) Verrückung aus einer Gleichgewichtslage heraus das Potential der inneren und äußeren Kräfte

$$\Pi = A_i + V$$

unverändert bleibt:

$$\delta \Pi = \delta (A_i + V) = 0 \quad \quad (1.2).$$

Das Potential der inneren Kräfte A_i ist gegeben durch die Formänderungsenergie (innere Arbeit), das Potential der äußeren durch das (negative) Produkt aus den äußeren Kräften

*) In diesem Aufsatz werden Untersuchungen weitergeführt, zu denen der Verfasser durch Prof. Trefftz (während seiner Tätigkeit in der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt) angeregt wurde. — Für einen großen Teil der Arbeit (insbesondere die Abschnitte 5, 6, 9) verdankt der Verfasser sehr viel der engen Zusammenarbeit mit seinem Kollegen R. Kappus.

[1]) Die Herleitung des Prinzips der virtuellen Verrückungen (1.1) für das elastische Gleichgewicht z. B. im Hdb. d. Physik VI, S. 70 ff. (Berlin 1928). — Eine sorgfältige Begründung der allgemeinen Theorie des Verhaltens an der Stabilitätsgrenze bei E. Trefftz: „Zur Theorie der Stabilität . . . ." ds. Ztschr. 13 (1933), S. 160 (weiteres Schrifttum siehe ebenda bzw. im Handbuch VI, S. 277 ff.). — Von der Trefftzschen Betrachtungsweise machen insbesondere die Untersuchungen des 5. Abschnittes unten Gebrauch.

[2]) Die Kenntnis des überkritischen Gebietes war überdies bisher für die Praxis von untergeordneter Bedeutung, weil „ausgebeulte" Konstruktionsteile als unzulässig angesehen wurden. Erst in den letzten Jahren ist man bei den Schalenkonstruktionen des Flugzeugbaus dazu übergegangen, größere Überschreitungen der kritischen Lasten als konstruktiv unbedenklich zuzulassen.

[3]) Z. B. Th. Pöschl: Über die Minimalprinzipe der Elastizitätstheorie. Bau-Ing. 17 (1936), S. 160.

und den Verschiebungen der Angriffspunkte[4]). Im Gültigkeitsbereich des Proportionalitätsgesetzes ist zahlenmäßig $V = -2 A_a$, wenn mit A_a die zwischen Null- und Endzustand von den äußeren Kräften unter Durchlaufen von lauter Gleichgewichtszuständen geleistete Arbeit bezeichnet wird. Das Prinzip (1.2) schreibt man daher gelegentlich auch in der Form[5])

$$\delta (A_i - 2 A_a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.3).$$

Demgegenüber benutzt man in der Stabilitätstheorie als „Prinzip der virtuellen Verrückungen" vielfach die Forderung[5])

$$\delta (A_i - A_a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.4).$$

Die vorliegende Arbeit will (an dem klassischen Beispiel des Druckstabes) zeigen, daß auch die Stabilitätsuntersuchungen am zweckmäßigsten im Anschluß an die eine Hauptgleichung (1.2) vorgenommen werden, wobei man nur im Ausdruck für die Formänderungsenergie folgerichtig die Glieder höherer Ordnung in den Verschiebungen beibehalten muß. Dieses Vorgehen ist vom praktischen Standpunkte aus notwendig, wenn man die Verhältnisse im überkritischen Gebiet mit untersuchen will, und vom systematischen Standpunkte aus wünschenswert, weil auf diese Weise deutlich wird, daß man ohne alle zusätzlichen Prinzipe auskommen kann. — Insbesondere wird die Betrachtung auch den scheinbaren Widerspruch zwischen den Gl. (1.3) und (1.4) in einfacher Weise klären.

Die Rechnung selbst führen wir in den Abschnitten 2 bis 7 in der folgenden Weise durch: Zunächst leiten wir die nicht-linearen Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen eines Balkens her unter Beibehaltung der Grundvoraussetzungen der elementaren Balkentheorie (Ebenbleiben der Querschnitte usw.). Sodann stellen wir den Ausdruck für die Formänderungsenergie A_i auf, gewinnen vermöge der Forderung

$$\delta \Pi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.5)$$

die Differentialgleichungen für die beiden Komponenten der Verschiebung und beantworten auf Grund der verschärften Forderung

$$\Pi = \text{Min} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.6)$$

die Frage nach der Stabilität der Gleichgewichtslagen. Zum Schlusse behandeln wir die gleiche Aufgabe mit Hilfe eines Ritz-Ansatzes für die Verschiebungen; auf diesem Wege läßt sich das Ergebnis der Stabilitätsbetrachtung besonders schön zur Anschauung bringen.

2. Zusammenhang zwischen den Verzerrungen γ_{ik} und den Verschiebungen u, w der Stabmittellinie[6]). Sind $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ die Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen, so ist, mit den Bezeichnungen der Abb. 1, der Ortsvektor eines Punktes der Balkenmittellinie vor der Deformation

$$\mathfrak{r}_0 = x\, \mathfrak{E}_1,$$

nach der Deformation

$$\mathfrak{r} = (x + u)\, \mathfrak{E}_1 + w\, \mathfrak{E}_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1).$$

Ist $\mathfrak{N}$ der Einheitsvektor der Normalen zur deformierten Mittellinie, so geht ein beliebiger Punkt

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{r}_0 + z\, \mathfrak{E}_3 = x\, \mathfrak{E}_1 + z\, \mathfrak{E}_3$$

nach der Grundvoraussetzung der Theorie der Balkenbiegung über in

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + z\, \mathfrak{N} = (x + u)\, \mathfrak{E}_1 + w\, \mathfrak{E}_3 + z\, \mathfrak{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.2)$$

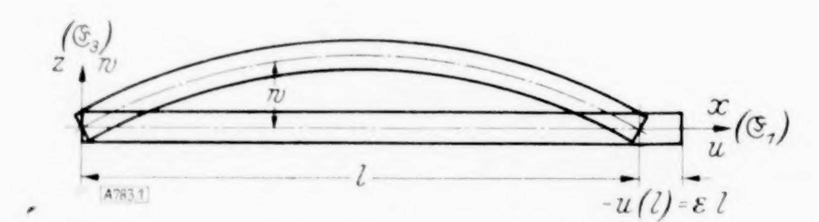


Abb. 1. Gedrückter Balken.

[4]) Gl. (1.2) gilt unabhängig davon, ob das Feld der äußeren Kräfte ein „Potential" im Sinne der Physik besitzt oder nicht. Sind X_i die äußeren Kräfte, u_i ihre Verschiebungen, so läßt sich formal immer schreiben: $V = -\Sigma X_i u_i$, d. h. $\delta V = -\Sigma X_i \delta u_i$. (Die Kräfte werden nicht variiert).

[5]) S. z. B. Th. Pöschl: a. a. O.

[6]) Vgl. die entsprechende Rechnung für die Platte bei Marguerre-Trefftz: „Über die Tragfähigkeit eines Plattenstreifens . . ." ZAMM 17 (1937), S. 85.

Den Einheitsvektor $\mathfrak{N}$ und seine Ableitung $\mathfrak{N}_x$ erhalten wir aus

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{r}_x \times \mathfrak{E}_2}{|\mathfrak{r}_x|} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2.3)$$

und

$$\mathfrak{N}_x = a\,\mathfrak{r}_x .$$

Der Proportionalitätsfaktor a ergibt sich wegen

$$\mathfrak{N}\,\mathfrak{r}_x = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2.4),$$

d. h.

$$-\mathfrak{N}\,\mathfrak{r}_{xx} = \mathfrak{N}_x\,\mathfrak{r}_x = a\,\mathfrak{r}_x^2$$

zu

$$a = -\frac{\mathfrak{N}\,\mathfrak{r}_{xx}}{\mathfrak{r}_x^2} = -\frac{(\mathfrak{r}_x \times \mathfrak{E}_2)\,\mathfrak{r}_{xx}}{|\mathfrak{r}_x|^3} = \frac{(\mathfrak{r}_x\,\mathfrak{r}_{xx}\,\mathfrak{E}_2)}{|\mathfrak{r}_x|^3} .$$

Es ist also

$$\mathfrak{N}_x = \frac{(1+u_x)\,w_{xx} - w_x\,u_{xx}}{[(1+u_x)^2 + w_x^2]^{3/2}}\,\mathfrak{r}_x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2.5),$$

und daher

$$\mathfrak{R}_x = \mathfrak{r}_x + z\,\mathfrak{N}_x = \mathfrak{r}_x\left(1 + z\,\frac{(1+u_x)\,w_{xx} - w_x\,u_{xx}}{[(1+u_x)^2 + w_x^2]^{3/2}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2.6),$$

$$[\mathfrak{r}_x = (1+u_x)\,\mathfrak{E}_1 + w_x\,\mathfrak{E}_3].$$

Die Komponente γ_{11} des Verzerrungstensors erhalten wir durch die Betrachtung des Linienelementes. Das Quadrat der Entfernung zweier Punkte mit den Koordinatendifferenzen dx, dz ist vor der Deformation

$$ds_0^2 = dx^2 + dz^2 ,$$

nach der Deformation

$$ds^2 = d\mathfrak{R}^2 = (\mathfrak{R}_x\,dx + \mathfrak{N}\,dz)^2 = \mathfrak{R}_x^2\,dx^2 + dz^2 \quad \ldots \ldots \quad (2.7).$$

Aus der Änderung des Koeffizienten von dx^2:

$$\gamma_{xx} = \mathfrak{R}_x^2 - 1$$

ergibt sich die (nicht-lineare) Komponente der elastischen Verzerrung (die „Dehnung") vermöge[7])

$$\frac{1}{2}\gamma_{11} = \sqrt{1 + \gamma_{xx}} - 1 = \frac{\gamma_{xx}}{2} - \frac{\gamma_{xx}^2}{8} \pm \cdots \quad \ldots \ldots \quad (2.8);$$

nach (2.6) ist

$$\gamma_{xx} = (2u_x + u_x^2 + w_x^2) + 2z\,\frac{(1+u_x)\,w_{xx} - w_x\,u_{xx}}{[(1+u_x)^2 + w_x^2]^{1/2}} + z^2\left[\frac{(1+u_x)\,w_{xx} - w_x\,u_{xx}}{(1+u_x)^2 + w_x^2}\right]^2 \quad (2.9),$$

und aus (2.8) und (2.9) läßt sich γ_{11} bis zu jedem gewünschten Grade der Genauigkeit errechnen.

3. Formänderungsernergie, Potential der inneren und äußeren Kräfte. Wie in der „gewöhnlichen" Balkentheorie gehen wir von der Annahme aus, daß der von den Querkräften herrührende Anteil der Formänderungsenergie klein sei gegen den aus den Längskräften stammenden, und setzen mit

$$\sigma_x = E\,\frac{\gamma_{11}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.0)$$

an

$$A_i = \frac{E}{2}\iiint\left(\frac{\gamma_{11}}{2}\right)^2 dx\,dy\,dz = \frac{E}{2}\iiint\left\{\left(\frac{\gamma_{xx}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_{xx}}{2}\right)^3 + \cdots\right\} dx\,dy\,dz \quad \ldots \quad (3.1).$$

Dann ist durch (3.1) zusammen mit (2.9) die innere Arbeit im elastischen Bereich in aller Vollständigkeit gegeben. Eine rechnerisch brauchbare Form erhalten wir, wenn wir nach Potenzen der Differentialquotienten von u und w entwickeln. Um die hierzu notwendige Größenordnungsbetrachtung bequem durchführen zu können, schreiben wir γ_{xx} in der Form:

$$\frac{1}{2}\gamma_{xx} = \psi_0 + z\,\psi_1 + z^2\,\psi_2 ,$$

[7]) Hdb. der Physik VI, S. 57.

und führen die Integrationen über y und z in (3.1) aus. Bedeuten dann F die Querschnittsfläche, i deren Trägheitsradius, l die Länge des Balkens, $\lambda_4, \lambda_6 \ldots$ gewisse von der Querschnittsgestalt abhängige Zahlen von der Größenordnung Eins[8]), so lassen sich die y-z-Integrale in der folgenden Form schreiben:

$$\iint d\,y\,d\,z = F, \qquad \iint z^2\,d\,y\,d\,z = i^2\,F, \qquad \iint z^4\,d\,y\,d\,z = \lambda_4\,i^4\,F, \qquad \iint z^6\,d\,y\,d\,z = \lambda_6 \cdot i^6\,F,$$

und für A_i ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} A_i = \frac{E\,F}{2}\int_0^l \{&[\psi_0{}^2 + i^2(\psi_1{}^2 + 2\,\psi_0\,\psi_2) + \lambda_4\,i^4\,\psi_2{}^2] \\ &- [\psi_0{}^3 + 3\,i^2(\psi_0\,\psi_1{}^2 + \psi_0{}^2\,\psi_2) + 3\,\lambda_4\,i^4(\psi_0\,\psi_2{}^2 + \psi_1{}^2\,\psi_2) + \lambda_6\,i^6\,\psi_2{}^3] + \cdots\}\,d\,x \end{aligned}\right\} \quad . \quad (3.2).$$

Nun weiß man, daß die Zusammendrückung u_x im kritischen Punkte von der Größenordnung $\left(\frac{i^2}{l^2}\right)$ ist. Lassen wir zu, daß die größte Ausbiegung (der „Biegepfeil") f von der gleichen Größenordnung wird wie i, so ist $w_x{}^2\left(\sim\left[\frac{f^2}{l^2}\right]\right)$ von der Ordnung $\left[\frac{i^2}{l^2}\right]$; der Zuwachs, den u_x infolge der Ausbiegung erfährt, ist (da er vom Vorzeichen von f unabhängig sein muß) proportional f^2, also von derselben Ordnung $\left[\frac{f^2}{l^2}\right] = \left[\frac{i^2}{l^2}\right]$ wie der kritische Wert von u_x. Es ist also die Gesamtzusammendrückung der Längeneinheit von der gleichen Größenordnung wie $w_x{}^2$, während $u_x{}^2$ gegen diese Größen klein ist.

Ordnen wir unter diesem Gesichtspunkte und brechen nach den Gliedern $\left[\left(\frac{i^2}{l^2}\right)^3\right]$ ab, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{E\,F}{2}\int_0^l \left\{\left[\left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)^2 + u_x{}^2\left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right) - \left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)^3\right]\right. \\ &\qquad \left. + i^2\left[w_{xx}{}^2\left(1 + u_x - \frac{w_x{}^2}{2}\right) - 2\,w_x\,w_{xx}\,u_{xx} - 3\,w_{xx}{}^2\left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)\right]\right\}d\,x \\ &= \frac{E\,F}{2}\int_0^l \left\{\left[\left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)^2(1 - w_x{}^2) + \left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)\left(\frac{w_x{}^2}{2}\right)^2\right]\right. \\ &\qquad \left. + i^2[w_{xx}{}^2(1 - 2\,u_x - 2\,w_x{}^2) - 2\,w_x\,w_{xx}\,u_{xx}]\right\}d\,x \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3.3).$$

Zu diesem Ausdrucke für A_i gehört ein Mittelwert der Spannung

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{F}\int \sigma_x\,d\,F = E\left[\left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)\left(1 - \frac{w_x{}^2}{2}\right) + \frac{w_x{}^4}{8}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.4).$$

Man bemerkt, daß in (3.3) die höheren Potenzen i^4, i^6 usf. herausfallen, daß also die oben eingeführten Querschnittsfunktionen $\lambda_4, \lambda_6 \ldots$ bei diesem Grade der Näherung **nicht** in die Rechnung eingehen; der Ausdruck (3.3) gilt daher für beliebige Querschnittsformen.

Die Untersuchung des elastischen Verhaltens auf Grund des Ansatzes (3.3) soll im 9. Abschnitt vorgenommen werden. Es zeigt sich dort, daß die Beibehaltung der Glieder 6. neben denen 4. Ordnung eine Verfeinerung bedeutet, die **praktisch** im allgemeinen belanglos ist. Wir beschränken uns daher im folgenden zunächst auf die Glieder 4. Ordnung (2ter für $\bar{\sigma}_x$), und setzen an:

$$A_i = \frac{E\,F}{2}\left[\int_0^l \left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)^2 d\,x + i^2\int_0^l w_{xx}{}^2\,d\,x\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.5),$$

$$\bar{\sigma}_x = E\left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.6).$$

[8]) Für den Rechteckquerschnitt ist z. B. $\lambda_4 = \frac{3}{20}$, $\lambda_6 = \frac{9}{28}, \ldots$

Bedeutet ε die Zusammendrückung der Längeneinheit, $P = p\,F = -\sigma_x F$ die Druckkraft, so ist $-(p\,F)(\varepsilon\,l) = V$ das Potential der äußeren Kräfte, bezogen auf den spannungslosen Ausgangszustand, und das Gesamtpotential Π wird (wenn wir es gleich für den etwas allgemeineren Fall des eine elastische Bettung $K\,w$ erfahrenden Stabes anschreiben)

$$\Pi = \frac{E\,F}{2}\int_0^l \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)^2 d\,x + \frac{E\,I}{2}\int_0^l w_{x\,x}^2\,d\,x + \frac{K\,F}{2}\int_0^l w^2\,d\,x - p\,F\,\varepsilon\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3.7).$$

Die mittlere potentielle Energie der Längeneinheit — noch dividiert durch $E\,F$ — läßt sich also $\left(\text{mit } \frac{K}{E} = k\right)$ darstellen in der Form:

$$\hat{\Pi} = \frac{\Pi}{E\,F\,l} = \frac{1}{2\,l}\int_0^l \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)^2 d\,x + \frac{i^2}{2\,l}\int_0^l w_{x\,x}^2\,d\,x + \frac{k}{2\,l}\int_0^l w^2\,d\,x - \frac{p}{E}\,\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \quad (3.8).$$

Aus (3.8) zusammen mit der Forderung (1.6)

$$\hat{\Pi} = \text{Min} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.9)$$

gewinnen wir alle Aussagen über das Verhalten des Stabes an und oberhalb der Stabilitätsgrenze.

4. Differentialgleichungen für die Verschiebungen u, w. Wir denken uns einen Balken, links ($x = 0$) gelenkig-starr gelagert, rechts ($x = l$) unter dem Einfluß einer zentrischen Druckkraft P in waagerechter Richtung frei beweglich (siehe Abb. 1). Als gegeben (d. h. als unabhängige Veränderliche unseres Problems) betrachten wir

entweder die waagerechte Verschiebung des rechten Endpunktes	oder die Druckspannung
$u(l) = -\varepsilon\,l$,	$p = \frac{P}{F}$.

Nach der Vorschrift des Prinzips der virtuellen Verrückungen sollen bei konstant gehaltener Last die Verschiebungen derart variiert werden, daß die variierte Lage mit den geometrischen Bedingungen verträglich ist. Ist an einem Randpunkte die Verschiebung (bei unserem Problem also z. B. ε) vorgeschrieben, so hält man den Punkt bei der Variation fest, damit nicht die Arbeit der (unbekannten!) äußeren Kräfte in der Rechnung stehenbleibt; ist dagegen die Kraft gegeben, so wird der (geometrisch nicht gebundene) Endpunkt mitvariiert; die Arbeit der äußeren Last (bei unserem Problem also $P\,\delta\,u$) geht dann in die Rechnung ein.

Variieren wir in (3.8) die Verschiebung u (d. h. erteilen wir den Balkenelementen — unter Festhaltung der Randpunkte bzw. der Last — eine virtuelle Verrückung in Richtung der Stabachse), so erhalten wir nach den Regeln der Variationsrechnung

$$\frac{\partial}{\partial\,x}\left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right) = 0,$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = 0; \quad u(l) = -\varepsilon\,l; \quad \Big| \quad u(0) = 0, \quad \left[u_x + \frac{w_x^2}{2} + \frac{p}{E}\right]_{x=l} = 0 \quad . \; . \quad (4.1);$$

bei Variation von w ergibt sich (unabhängig davon, ob ε oder p als gegeben zu denken ist)

$$-w_x\frac{\partial}{\partial\,x}\left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right) - \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)w_{x\,x} + i^2\,w_{x\,x\,x\,x} + k\,w = 0,$$

mit den Randbedingungen

$$w(0) = w(l) = w_{x\,x}(0) = w_{x\,x}(l) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.2).$$

Die exakte Integration des Systems (4.1), (4.2) von nicht-linearen simultanen Differentialgleichungen bereitet hier keine Schwierigkeit. Aus (4.1) folgt

$$u_x + \frac{w_x^2}{2} = \text{konst.} = -\varepsilon_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.3),$$

$$u = u(0) - \varepsilon_0\,x - \int_0 \frac{w_x^2}{2}\,d\,x,$$

und unter Benutzung der Beziehung (4.3) nimmt (4.2) die Form an:

$$w_{xxxx} + \frac{\varepsilon_0}{i^2} w_{xx} + \frac{k}{i^2} w = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.4).$$

Die Lösung dieser linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten lautet

$$w = f \sin \varkappa_0 x + g \cos \varkappa_0 x + f_1 \sin \varkappa_1 x + g_1 \cos \varkappa_1 x ,$$

wobei $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ die positiven Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\varkappa^4 - \frac{\varepsilon_0}{i^2} \varkappa^2 + \frac{k}{i^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.5)$$

sind:

$$\varkappa_{0,1}{}^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{i^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0{}^2}{i^4} - \frac{k}{i^2}} .$$

Zur Bestimmung der 6 Integrationskonstanten f, g, f_1, g_1, $u(0)$, ε_0 haben wir die 6 Randbedingungen (4.1) und (4.2)

$$g + g_1 = 0, \qquad \varkappa_0{}^2 g + \varkappa_1{}^2 g_1 = 0,$$

$$f \sin \varkappa_0 l + f_1 \sin \varkappa_1 l = 0, \qquad f \varkappa_0{}^2 \sin \varkappa_0 l + f_1 \varkappa_1{}^2 \sin \varkappa_1 l = 0,$$

$$u(0) = 0,$$

und

$$-\varepsilon l = u(0) - \varepsilon_0 l - \int_0^l \frac{w_x{}^2}{2} dx \quad \Bigg| \quad -\varepsilon_0 + \frac{p}{E} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.6).$$

Es ergibt sich[9])

$$f_1 = g_1 = g = u(0) = 0 ,$$

und entweder

$$f = 0, \qquad w = 0,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_0 = \varepsilon, & \Big| \quad \varepsilon_0 = \dfrac{p}{E}, \\ u = -\varepsilon x, & \Big| \quad u = -\dfrac{p}{E} x \end{array}\right\} \quad . \quad (4.7),$$

oder[9])

$$f \neq 0, \qquad w = f \sin \varkappa_0 x \qquad \varkappa_0 = \frac{\pi}{l},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} + k \frac{l^2}{\pi^2} = \varepsilon^* \quad \ldots \ldots \quad (4.8),$$

$$u = -\varepsilon^* x + \frac{\pi}{8} \frac{f^2}{l} \sin \frac{2 \pi x}{l} \quad \ldots \ldots \quad (4.9).$$

Es gibt also, wie man sieht, zweierlei Gleichgewichtslagen: die gerade ($f = 0$) und die gekrümmte ($f \neq 0$). Die gerade Lage wird durch p oder ε eindeutig gekennzeichnet, die gekrümmte wohl durch ε — denn die Amplitude f der Ausbeulung läßt sich an der ersten Gl. (4.6) eindeutig bestimmen

$$\frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} = \varepsilon - \varepsilon^* \quad \ldots \ldots \quad (4.9')$$

[9]) Die Möglichkeit $f = g = g_1 = 0$, $f_1 \neq 0$, scheiden wir aus, weil die Lösung $w = f_1 \sin \varkappa_1 x$ mit

$$\varkappa_1{}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{i^2} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0{}^2}{i^4} - \frac{k}{i^2}}$$

im Sonderfall $k \rightarrow 0$ sinnlos wird.

— nicht aber durch p. Aus der zweiten Gl. (4.6) folgt vielmehr, daß p selbst bei $f \neq 0$ einen ganz bestimmten „kritischen“ Wert

$$p = E\,\varepsilon^* = p^* \qquad \text{(4.9'')}$$

nicht überschreiten kann[10]). p ist daher als unabhängiger Parameter ungeeignet (anders als beim entsprechenden Plattenproblem[11])). Aus (4.9') erkennt man, daß f nur für $\varepsilon > \varepsilon^*$ von Null verschiedene reelle Werte annimmt.

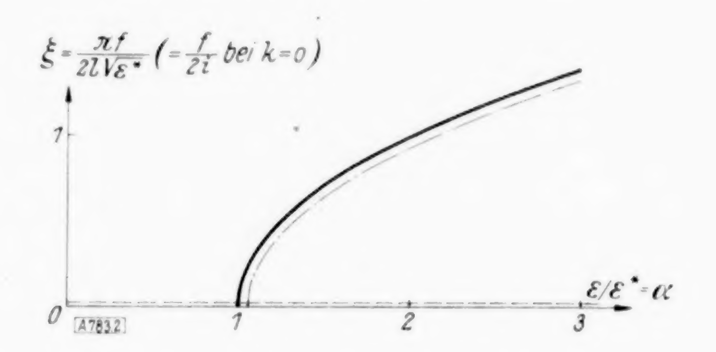


Abb. 2. Biegepfeil f über ε.

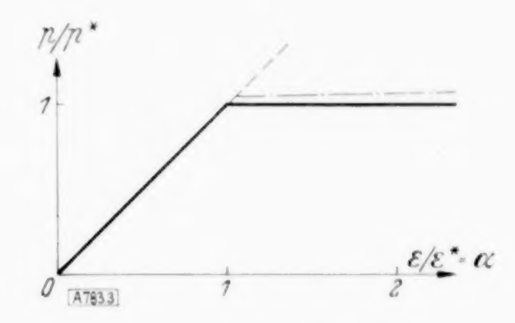


Abb. 3. Last P über ε.

In den Abb. 2 und 3 sind die Größen f und p in Abhängigkeit von ε dargestellt. Die ausgezogenen Linien gelten für die Lösung (4.9), die gestrichelten für (4.7). (Durch die strichpunktierten Linien ist das Ergebnis der verfeinerten Rechnung des 9. Abschnittes — in einem stark vergrößernden Maßstabe — angedeutet.)

5. Stabiles und labiles Gleichgewicht. In der „gewöhnlichen“ Elastizitätstheorie kann man sich bei der Bestimmung von Gleichgewichtszuständen auf die Forderung

$$\delta \Pi = 0, \qquad \text{d. h.} \quad \Pi = \text{Extr.} \qquad \text{(5.1)}$$

beschränken, da die Zusatzbedingung $\delta^2 \Pi > 0$ (mechanisch: die Stabilität der Gleichgewichtslage) dort wegen der Linearisierung ein für allemal gesichert ist[12]); beim vorliegenden Problem aber müssen wir ausdrücklich die Minimalforderung aufstellen, da erst durch

$$\delta \Pi = 0, \qquad \delta^2 \Pi > 0, \qquad \text{d. h.} \quad \Pi = \text{Min} \qquad \text{(5.2)}$$

die stabilen Gleichgewichtslagen von anderen möglichen (den instabilen) Lagen ausgezeichnet sind. — Wir präzisieren den Begriff der Stabilität durch die folgende Verabredung[13]):

1. Wir nennen einen Gleichgewichtszustand stabil, wenn für alle benachbarten Zustände die potentielle Energie einen größeren Wert annimmt.
2. Wir nennen einen Gleichgewichtszustand labil (instabil), wenn es mindestens einen benachbarten Zustand gibt, zu dem ein kleinerer Wert der potentiellen Energie gehört.
3. Wir sprechen von der Stabilitätsgrenze (d. h. einem indifferenten Gleichgewichtszustand), wenn es außer dem gegebenen Gleichgewichtszustand mindestens einen benachbarten Zustand gibt, dessen potentielle Energie ebenso groß ist, aber keinen, für den sie kleiner ist.

Wir greifen zurück auf (3.8) bzw. (3.9):

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2l}\int_0^l \left(u_x + \frac{w_x{}^2}{2}\right)^2 dx + \frac{i^2}{2l}\int_0^l w_{xx}{}^2\, dx + \frac{k}{2l}\int_0^l w^2\, dx - \frac{p}{E}\,\varepsilon \overset{!}{=} \text{Min},$$

[10]) Wir werden im 9. Abschnitt sehen, daß diese Aussage nur zutrifft, solange der Ansatz (3.5) besteht. Bei Zugrundelegung des verfeinerten Ansatzes (3.3) ergibt sich eine (allerdings sehr geringfügige) Erhöhung der Last über (4.9'') hinaus.

[11]) K. Marguerre: Luftf.-Forsch. 1937, S. 124 oben.

[12]) Hdb. d. Physik VI, S. 71 u. 72.

[13]) Die folgende Definition wurde (dem Sinne nach) von E. Trefftz gelegentlich seiner DVL-Vorlesungen gegeben.

und „variieren", d. h. ersetzen u durch $u + \delta u$ und w durch $w + \delta w$; dann ergibt sich, wenn wir nach Potenzen vom $\delta u, \delta w$ ordnen und hinter den Gliedern zweiter Ordnung abbrechen

$$\Delta \hat{\Pi} = \hat{\Pi}(u + \delta u, w + \delta w) - \hat{\Pi}(u, w) = \delta \hat{\Pi} + \frac{1}{2} \delta^2 \hat{\Pi} + \cdots = -\frac{1}{l} \frac{p}{E} \delta u|_{x=l}$$

$$+ \frac{1}{l} \int_0^l \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right) \delta u_x \, dx + \frac{1}{l} \int_0^l \left[\left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right) w_x \delta w_x + i^2 w_{xx} \delta w_{xx} + k w \delta w\right] dx$$

$$+ \frac{1}{2l} \int_0^l (\delta u_x)^2 \, dx + \frac{1}{2l} \int_0^l \left[\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + w_x^2\right)(\delta w_x)^2 + i^2 (\delta w_{xx})^2 + k (\delta w)^2\right] dx + \cdots .$$

Die Forderung, daß die Glieder *erster* Ordnung verschwinden sollen, führt auf die Gln. (4.1) und (4.2); die Stabilitätsfrage wird durch die Glieder *zweiter* Ordnung beantwortet[14]). Indem wir für u, w die aus $\delta \Pi = 0$ folgenden Ergebnisse einsetzen, ergibt sich mit (4.7) (gerade Lage)

$$(\delta^2 \hat{\Pi})_1 = (\delta^2 \hat{A}_i)_1 = \frac{1}{l} \int_0^l [-\varepsilon (\delta w_x)^2 + i^2 (\delta w_{xx})^2 + k (\delta w)^2] \, dx + \frac{1}{l} \int_0^l (\delta u_x)^2 \, dx \quad . \quad . \quad (5.3),$$

mit (4.9) (ausgebogene Lage):

$$(\delta^2 \hat{\Pi})_2 = (\delta^2 \hat{A}_i)_2 = \frac{1}{l} \int_0^l \left[\left(-\varepsilon^* + \frac{\pi^2}{l^2} f^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l}\right)(\delta w_x)^2 + i^2 (\delta w_{xx})^2 + k (\delta w)^2\right] dx + \frac{1}{l} \int_0^l (\delta u_x)^2 \, dx \quad (5.4).$$

Wir bestimmen zunächst die Stabilitäts*grenze*. Nach der oben ausgesprochenen Definition soll es an der Stabilitätsgrenze *einen* Zustand geben, bei dem die zweite Variation verschwindet, aber *keinen*, bei dem sie negativ wird: der Wert Null ist also der *kleinste* Wert, den $\delta^2 \Pi$ im Grenzpunkte überhaupt annehmen kann. Hat daher $\delta^2 \Pi$ gewisse Stetigkeitseigenschaften (deren Vorhandensein aus mechanischen Gründen einleuchtend ist), so ist der „ausgezeichnete" Wert $\delta^2 \Pi = 0$ zugleich ein analytisches *Minimum*, verglichen mit den Nachbarwerten, und das zugehörige („ausgezeichnete") Verschiebungssystem $\delta u, \delta w$ bestimmt sich aus der Bedingung

$$\delta(\delta^2 \hat{\Pi}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.5).$$

In unserem Falle führt diese Forderung auf die beiden Differentialgleichungen

$$(\delta u)_{xx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.6),$$

$$(\delta w)_{xxxx} + \frac{\varepsilon}{i^2} (\delta w)_{xx} + \frac{k}{i^2} (\delta w) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.7)$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \delta w(0) = \delta w(l) = \delta w_{xx}(0) = \delta w_{xx}(l) = \delta u(0) = 0 \\ \delta u(l) = 0 \quad \Big| \quad \delta u_x(l) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5.8).$$

und

Das die Randbedingungen befriedigende Lösungssystem lautet

$$\delta u = 0, \qquad \delta w = \delta f \sin \frac{\pi x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.9).$$

Die Amplitude $\delta f \neq 0$ bleibt unbestimmt (Eigenwertproblem!), und aus (5.7) ergibt sich für den kritischen Wert von ε

$$\varepsilon_k = \frac{\pi^2 \cdot i^2}{l^2} + k \frac{l^2}{\pi^2},$$

d. h. genau der Ausdruck $\varepsilon_k = \varepsilon^*$, durch den der Verzweigungspunkt des Gleichgewichtes gekennzeichnet wurde: Stabilitätsgrenze und Verzweigungspunkt fallen zusammen. —

[14]) In dem hier (wie in den Anwendungen häufig) vorliegenden Fall, daß die Verschiebung des Kraftangriffspunktes *unabhängige* Veränderliche ist, geht das Potential der *äußeren* Kraft in die zweite Variation nicht ein: $\Delta V = \Delta(P u) = P \Delta u = P \delta u$, also $\delta^2 V = 0$.

Die Frage nach der Stabilität der Gleichgewichtslagen unterhalb und oberhalb der Grenze kann nun sofort beantwortet werden:

1. Da die gestreckte Lage (siehe (5.3)) für hinreichend kleine ε stabil ist, ist sie es aus Stetigkeitsgründen für $\varepsilon \leq \varepsilon^*$.

2. Für $\varepsilon > \varepsilon^*$ ist die gestreckte Lage instabil, da wir ein δw, nämlich

$$\delta w = \delta f \sin \frac{\pi x}{l},$$

angeben können, für das $\delta^2 \Pi < 0$ wird.

3. Für $\varepsilon > \varepsilon^*$ ist die gekrümmte Lage stabil; denn es gilt für den einen Anteil in (5.4)

$$\frac{1}{l}\int_0^l [-\varepsilon^* (\delta w_x)^2 + i^2 (\delta w_{xx})^2 + k (\delta w)^2]\, d x \geq 0,$$

wie man auch δw annehmen mag; und hierzu kommt noch ein positives Glied

$$\frac{\pi^2}{l^3}\int_0^l f^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} (\delta w)^2\, d x .$$

6. Herleitung der üblichen Ansätze aus dem hier gegebenen Verfahren. Die im 5. Abschnitte vorgenommene Untersuchung des Verhaltens an der Stabilitätsgrenze erlaubt den Zusammenhang zwischen den üblichen Stabilitätsbetrachtungen und den hier durchgeführten systematischen Überlegungen aufzuzeigen.

Bei Stabilitätsuntersuchungen beschränkt man sich gewöhnlich darauf, das Verhalten an der Stabilitäts*grenze* zu untersuchen. Man setzt eine — in unserem Fall die gerade — Gleichgewichtsfigur *als bekannt* voraus und untersucht nur den „Übergang" zur gekrümmten. Dabei denkt man sich *entweder* die Stabenden absolut festgehalten, deutet also den Vorgang als eine rein-innere Energieumlagerung, *oder* aber, man erteilt dem Stabende eine infinitesimale Verrückung, d. h. man denkt sich noch äußere Arbeit hineingesteckt, die vom System als innere Energie aufgenommen wird. In Formeln:

$$A_i = 0 \quad \Big| \quad A_i - A_a = 0 \qquad \text{(6.1)}.$$

Dabei versteht man unter A_a und A_i in beiden Fällen die Gesamtarbeit *abzüglich* der vor Erreichen der Stabilitätsgrenze aufgewandten bzw. aufgespeicherten Arbeitsbeträge. Bezeichnet man die (gesuchte!) kritische Zusammenpressung $-u_x$ mit ε_0, die kritische Spannung mit p_0, so ist:

$$A_i = \frac{EF}{2}\left[i^2 \int_0^l w_{xx}{}^2\, d x + k \int_0^l w^2\, d x - \varepsilon_0 \int_0^l w_x{}^2\, d x\right] \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} A_i &= \frac{EF}{2}\left[i^2 \int_0^l w_{xx}{}^2\, d x + k \int_0^l w^2\, d x\right], \\ A_a &= \frac{F}{2} p_0 \int_0^l w_x{}^2\, d x \end{aligned} \qquad \text{(6.2)}.$$

Die erste Formel erhält man in ähnlicher Weise wie oben (3.7), indem man das Glied mit $w_x{}^4$ (Beschränkung auf „kleine" Auslenkungen) streicht, die zweite aus der Forderung, daß beim Übergang von der geraden in die gekrümmte Lage keine Dehnungsenergie neu aufgenommen werden soll, d. h. daß der gebogene Balken die gleiche Länge haben soll wie der gestreckte; daraus folgt, daß die Enden infolge der Biegung um ein Stück

$$u_1 = -\frac{1}{2}\int_0^l w_x{}^2\, d x$$

sich nähern müssen, so daß die äußere Kraft eine Arbeit $-p_0 F u_1 = \frac{p_0 F}{2}\int_0^l w_x{}^2\, d x$ leistet.

Definiert man nun die Stabilitätsgrenze als diejenige Stelle, an der die Bedingung (6.1) für eine bestimmte Verschiebung $w(x)$ erfüllt wird, während für alle anderen die Ungleichung gilt

$$A_i > 0 \quad \Big| \quad A_i - A_a > 0,$$

so nimmt A_i bzw. $A_i - A_a$ für dieses $w(x)$ seinen Kleinstwert an, und es muß also sein:

$$\delta A_i = 0 \quad \Big| \quad \delta(A_i - A_a) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6.3).$$

Die Doppelaussage

$$A_i = \frac{EF}{2}\left[i^2 \int_0^l w_{xx}^2\, dx + k \int_0^l w^2\, dx - \varepsilon_0 \int_0^l w_x^2\, dx\right] = \mathrm{Min} = 0 \quad \Bigg| \quad A_i - A_a = \frac{EF}{2}\left[i^2 \int_0^l w_{xx}^2\, dx + k \int_0^l w^2\, dx - \frac{p_0}{E}\int_0^l w_x^2\, dx\right] = \mathrm{Min} = 0 \quad (6.4)$$

ist, da die Ausdrücke (6.4) homogene quadratische Funktionen von w sind, nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen widerspruchsfrei[15]).

Der Zusammenhang der ersten Gl. (6.4) mit unseren früheren Überlegungen (Gl. (5.3)) ist evident. Gl. (6.4) sagt nichts anderes aus, als daß die zweite Variation ein Minimum vom Werte 0 haben soll; nur, daß in (6.4) statt δw einfach w geschrieben ist. Diese Schreibweise hat — außer der Bequemlichkeit — auch einen sachlichen Grund: die ausgezeichnete Verschiebung δw (durch die $\delta^2 \Pi = 0$ gemacht wird) ist an der Stabilitätsgrenze nicht nur eine geometrisch-mögliche (virtuelle) sondern auch eine mechanisch-mögliche, d. h. ohne Veränderung der äußeren Last wirklich eintretende Verschiebung. Trotzdem verdient die Schreibweise δw unbedingt den Vorzug, 1. weil das δ-Zeichen den Zusammenhang mit der zweiten Variation zum Ausdruck bringt (es bleibt ja, wie wir oben zeigen konnten, wenn man ε vorschreibt, nicht f selbst, sondern nur δf „unbestimmt"), 2. weil die bequemere Schreibweise (formal) den Übergang ins überkritische Gebiet erschwert, da die unendlich-kleinen Verschiebungen an der Grenze und die endlichen Verschiebungen oberhalb der Grenze durch dasselbe Zeichen ausgedrückt werden müßten.

Der Zusammenhang zwischen der zweiten Gl. (6.4) und unseren früheren Überlegungen läßt sich auf folgende Weise herstellen: Wir hatten aus der Forderung, daß die Glieder zweiter Ordnung in δu, δw ein Minimum vom Werte Null liefern sollten, gefolgert: $\delta u = 0$ (Gl. (5.9)). Der Bedingung $\delta^2 \Pi = \delta(\delta^2 \Pi) = 0$ wird aber auch Genüge getan, wenn δu von höherer Ordnung klein ist als δw, also z. B. $\sim (\delta w)^2$; dann gehört das von Null verschiedene Glied $(\delta u)^2$ gar nicht mehr zu den Gliedern zweiter Ordnung, und bleibt von der oben durchgeführten Rechnung unberührt. Andererseits müssen nun aber die Randglieder

$$\left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)\delta u\,\Big|_{x=l} + \frac{p}{E}\,\delta u\,\Big|_{x=l}$$

(vgl. 4.1) zu den Gliedern zweiter Ordnung gezählt werden, so daß wir mit dem speziellen (an sich willkürlichen) Ansatz

$$\delta u_x = -\frac{1}{2}(\delta w_x)^2, \qquad \text{d. h.} \quad \delta u\,\Big|_{x=l} = -\frac{1}{2}\int_0^l (\delta w_x)^2\, dx \quad \ldots \ldots \quad (6.5)$$

an Stelle von (5.3) erhalten:

$$(\delta^2 \Pi)_1 = \frac{1}{l}\int_0^l \left[-\varepsilon(\delta w_x)^2 + i^2(\delta w_{xx})^2 + k(\delta w)^2\right] dx - \frac{1}{l}\left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)\int_0^l (\delta w_x)^2\, dx - \frac{p}{E\,l}\int_0^l (\delta w_x)^2\, dx.$$

[15]) Bei Näherungsrechnungen zur Bestimmung der kritischen Last (Ritz-Ansatz) bedient man sich vielfach, dem Vorgehen von Timoshenko folgend, explizit nur der Bedingung $A_i - A_a = 0$.

An der Stabilitätsgrenze ist $-\varepsilon = u_x + \frac{w_x^2}{2} = -\varepsilon^*$, so daß sich der erste und vierte Summand herausheben; es bleibt daher (mit $p = p_0$)

$$(\delta^2 \hat{\Pi})_1 = \frac{i^2}{l}\int_0^l (\delta\, w_{xx})^2\, d\,x + \frac{k}{l}\int_0^l (\delta\, w)^2 - \frac{p_0}{E\,l}\int_0^l (\delta\, w_x)^2\, d\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.6),$$

d. h. genau der Ausdruck (6.4), nur in $\delta\, w$ statt in w geschrieben.

Durch diese (zweifellos etwas künstliche) Deutung läßt sich der zweite Ansatz (6.4)

$$A_i - A_a = \delta\,(A_i - A_a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.7)$$

aus dem „erweiterten" Prinzip der virtuellen Verrückungen rechtfertigen. Trotzdem, und trotz der „Anschaulichkeit" der üblichen Herleitung ist die Schreibweise (6.7) aus den folgenden Gründen nicht ratsam. 1. Der Ausdruck $A_a = -p\,F\,u|_{x=l}$ ist nur mittelbar eine Funktion der Verschiebung w, und die Verwendung des δ-Zeichens für eine „Variation", bei der $\delta\, u$ vermöge

$$u = -\frac{1}{2}\int_0 w_x^2\, d\,x$$

zuerst durch w ausgedrückt werden muß, widerspricht der Bezeichnungsweise der Variationsrechnung, nach der $\delta\, u$ und $\delta\, w$ als voneinander unabhängige Veränderliche behandelt werden müßten. 2. Bei komplizierteren Problemen ist es oft sehr schwierig, den Ausdruck für die äußere Arbeit mit Hilfe der „Anschauung" unmittelbar hinzuschreiben. Und da die Aufspaltung der Dehnungsarbeit in einen äußeren und einen inneren Anteil durch einen Ansatz nach Art von (6.5) ja doch willkürlich ist, wird man der Gleichung

$$A_i = 0, \quad \delta\, A_i = 0 \quad \text{(d. h. eigentlich } \delta^2 A_i = 0, \quad \delta\,(\delta^2 A_i) = 0)$$

im Sinne des ersten Ansatzes (6.3) auch aus praktischen Gründen häufig den Vorzug geben.

Ein dritter Einwand betrifft die Frage, ob man das Variationszeichen δ auf eine „äußere Arbeit" A_a überhaupt anwenden soll. Denn im allgemeinen läßt sich die äußere Arbeit durch die Kräfte und Verschiebungen auf mehrere Arten ausdrücken: aus diesem Grunde ist insbesondere die Schreibweise (1.3) für das Prinzip der virtuellen Verrückungen durchaus unzweckmäßig[16]). — Von diesem Gesichtspunkte aus ist jedoch gegen die Schreibweise (6.7) nichts einzuwenden; denn da beim Übergang von der geraden in die gekrümmte Lage die Last p_0 sich nur ändert um Größen höherer Ordnung in der zu variierenden Querverschiebung w, wird p_0 durch das Variationszeichen gar nicht berührt. D. h. wir können A_a in (6.7) unmittelbar durch eine Potentialdifferenz V ersetzen, und wenn man von dem unter 1. oben formulierten Einwand absehen will, ist das δ-Zeichen in $\delta\, A_a = -\delta\, V$ durchaus eindeutig: es fordert die Variation der Querverschiebung unter Festhaltung der äußeren Last.

Mit Benutzung des Zeichens V lautet (6.7)

$$A_i + V = \delta\,(A_i + V) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.8).$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß sie deutlich macht, inwiefern die erste Teilaussage etwas anderes ausdrücken will, als den gewöhnlichen Energiesatz $A_i - A_a = 0$. Sie hat den Nachteil, daß die formale Ähnlichkeit der zweiten Teilaussage mit dem Prinzip (1.2) dazu verleitet, die Formel (6.8) (wie dies in den Anwendungen häufig geschieht) als eine besondere Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen anzusprechen. Aus unserer Herleitung geht hervor, daß sie das nicht ist: das Prinzip (1.2) beantwortet die Frage nach den Gleichgewichtslagen, die sich unter gegebenen Lasten (oder Randverschiebungen) einstellen; die Formel (6.8) dagegen liefert die zweite am Verzweigungspunkt mögliche Gleichgewichtsform, und den gesuchten Wert der Last, bei dem das Gleichgewicht mehrdeutig zu werden beginnt.

Wenn man sich daher (was für die praktische Rechnung in manchen Fällen nicht unbequem ist) des Ansatzes (6.7) bzw. (6.8) für die Untersuchung der Verzweigungspunkte des elastischen Gleichgewichts bedient, so sollte man die Bezeichnung „Prinzip der virtuellen Verrückungen" (wodurch allein auch der eingangs erwähnte „Widerspruch" zwischen den Formeln (1.3) und (1.4) entsteht) auf alle Fälle vermeiden.

[16]) So läßt sich z. B. beim gedrückten Stab unterhalb des kritischen Punktes das Doppelte der äußeren Arbeit in drei Formen schreiben: $E\,\varepsilon^2$, $p\,\varepsilon$, p^2/E — welche soll (bezüglich ε!) variiert werden? Gemeint ist die zweite Form: aber das ist infolge der Schreibweise $2\,A_a$ an Stelle von $-V$ (s. Fußnote 4) nicht mehr eindeutig erkennbar.

7. Deutung der bisherigen Ergebnisse mit Hilfe eines Ritz-Ansatzes. Die Ergebnisse der Abschnitte 4 und 5 lassen sich sehr schön veranschaulichen, wenn wir das Variationsproblem durch Verwendung der Ritzschen Methode in ein gewöhnliches Minimumproblem verwandeln. Als einen allen Randbedingungen genügenden „Ritz-Ansatz" wählen wir die Lösungen der Differentialgleichungen (4.2) und (4.1)

$$w = f \sin\frac{\pi x}{l}, \qquad u_x + \frac{w_x^2}{2} = -\varepsilon + \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} \quad \text{. . . . . (7.1).}$$

Dann liefert uns die Minimalforderung

$$\left.\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \frac{1}{2l}\int_0^l \left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{i^2}{2l}\int_0^l w_{xx}^2\, dx + \frac{k}{2}\int_0^l w^2\, dx - \frac{p}{E}\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2}\right)^2 + \frac{i^2 \pi^4 f^2}{4 l^4} + \frac{f^2 k}{4} - \frac{p}{E}\varepsilon = \frac{\pi^4 f^4}{32 l^4} - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2}(\varepsilon - \varepsilon^*) + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{p}{E}\varepsilon \overset{!}{=} \text{Min} \end{aligned}\right\} \quad . \text{ (7.2)}$$

zwei Gleichungen zur Bestimmung des „Freiwertes" f und der Last p in Abhängigkeit von der Zusammendrückung ε (die mit den früheren Ergebnissen (s. S. 62) notwendig exakt übereinstimmen müssen):

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varepsilon} = \varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} - \frac{p}{E} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial f} = \frac{f \pi^2}{2 l^2}\left[\varepsilon^* - \left(\varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2}\right)\right] = 0 \quad \text{. . . . . (7.3);}$$

also entweder

$$f = 0; \; p = E\varepsilon \quad \text{. . . . . (7.4),}$$

oder

$$f \neq 0, \quad \frac{p}{E} = \varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} = \varepsilon^* = i^2\frac{\pi^2}{l^2} + k\frac{l^2}{\pi^2} \quad \text{. . . . . (7.5).}$$

Die Stabilitätsfrage beantwortet wieder die zweite Variation, hier also die zweite Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial \varepsilon^2} = 1, \qquad \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial f^2} = \frac{\pi^2}{2 l^2}\left(\varepsilon^* - \varepsilon + 3\frac{\pi^2 f^2}{4 l^2}\right) \quad \text{. . . . . (7.6).}$$

Man erkennt:

für $\varepsilon < \varepsilon^*$ ist $\delta^2 \hat{\Pi} > 0$,

für $\varepsilon > \varepsilon^*$ und $\frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} = \varepsilon - \varepsilon^*$ ist $\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial f^2} = \frac{\pi^2}{l^2}(\varepsilon - \varepsilon^*) > 0$,

für $\varepsilon > \varepsilon^*$ und $f = 0$ ist $\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial f^2} = \frac{\pi^2}{2 l^2}(\varepsilon^* - \varepsilon) < 0$,

d. h. die gerade Lage ist stabil für $\varepsilon < \varepsilon^*$, instabil für $\varepsilon > \varepsilon^*$, die gekrümmte ist, sobald sie überhaupt mechanisch möglich, ist (also für $\varepsilon > \varepsilon^*$) immer stabil.

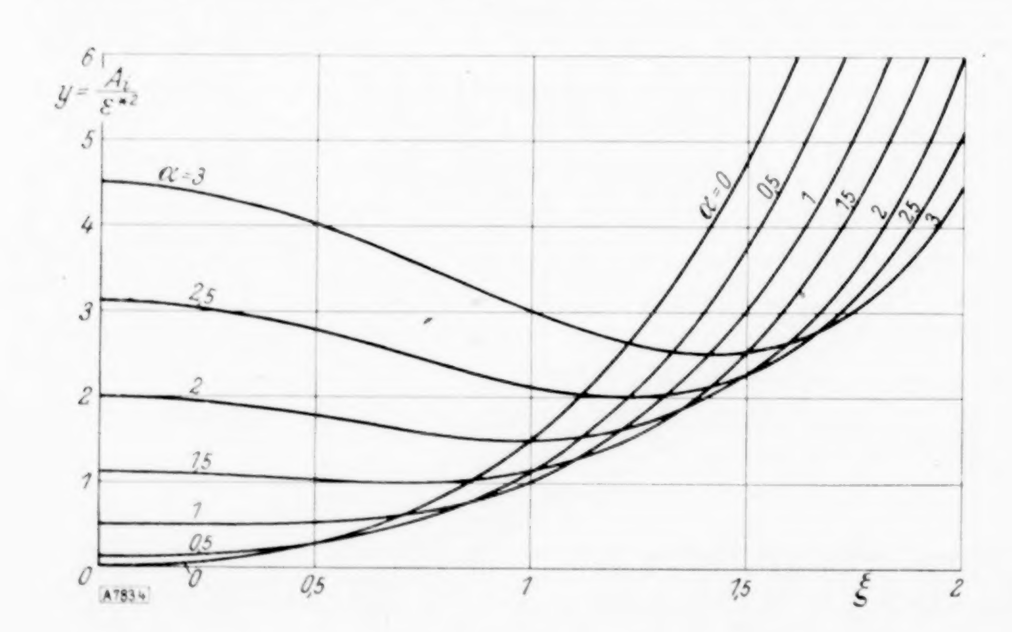


Abb. 4. Abhängigkeit der Formänderungsenergie vom Biegepfeil $f = \xi\,\frac{2}{\pi}\cdot l\sqrt{\varepsilon^*}$. Zusammendrückung $\varepsilon = \alpha\,\varepsilon^*$ als Parameter.

Die Abb. 4 bringt das Ergebnis der Gln. (7.3)..(7.6) zur Anschauung. Aufgetragen ist $\hat{A}_i$

$$\text{bzw.} \quad \frac{\hat{A}_i}{\varepsilon^{*2}} = \frac{1}{2}\xi^4 - \xi^2(\alpha - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7.7)$$

in Abhängigkeit von $f\left(\text{bzw. } \xi = \frac{f\pi}{2l\sqrt{\varepsilon^*}}\right)$ mit $\varepsilon\left(\text{bzw. } \alpha = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}\right)$ als Parameter. Das Potential der äußeren Kräfte ist nicht hinzugenommen, weil es einen weiteren, die Übersicht erschwerenden Parameter (die Last) hereinbringen würde, und von der Minimalforderung bezüglich f ja doch nicht berührt wird. (Das Prinzip fordert Konstanthalten der äußeren Lasten!)

Besonders schön bringt die Abb. den „Typus"-Wechsel der Kurven beim Übergang vom unterkritischen ins überkritische Gebiet zur Anschauung: das Zusammenfallen von Maximum und Minimum für $\alpha = 1$. Es wird hier ganz deutlich, daß die gelegentlich vertretene Ansicht, das Wesentliche der Stabilitätsprobleme sei nicht das Auftreten großer Verschiebungen, unrichtig ist: Obwohl im Augenblick des Übergangs ($f_{\min} \to 0$) die Verschiebungen klein sind, wird das Verhalten des Körpers doch durch die „Möglichkeit" großer Ausbiegungen bestimmt, mathematisch gesprochen durch die Tatsache, daß im kritischen Punkte eben kein gewöhnliches Minimum vorliegt. (Es ist dort $\delta\Pi = \delta^2\Pi = \delta(\delta^2\Pi) = 0$.)

Es muß übrigens angemerkt werden, daß die Tatsache $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial f^2} > 0$ keinen Beweis dafür abgibt, daß die gekrümmte Lage wirklich stabil ist. Denn nach unserer früheren Definition muß $\delta^2\Pi > 0$ sein für jede[17]) denkbare Variation δw, nicht nur für den besonderen Ansatz: $(w + \delta w) = (f + \delta f)\sin\frac{\pi x}{l}$ [18]). Die Näherungsrechnung mit Hilfe des Ritz-Ansatzes macht aber die Stabilität in anschaulicher Weise plausibel.

8. Der unendlich lange elastisch gebettete Druckstab. Die Bestimmung der Knicklast eines unendlich langen elastisch gebetteten Balkens (und in ähnlicher Weise der unendlich langen Platte oder Schale) ist mit Hilfe der Differentialgleichungen (4.1) und (4.2) allein nicht möglich. Die Forderung der (reinen) Periodizität der Querverschiebung w, die bei diesem Probleme an die Stelle der „Rand"-bedingungen tritt, reicht nicht aus, um alle Konstanten zu bestimmen: die Periodenlänge l bleibt unbestimmt.

Wir erhalten die Gleichung zur Bestimmung von l, wenn wir die Forderung (3.9)

$$\hat{\Pi} = \text{Min} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8.1)$$

für l noch einmal gesondert aufstellen:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial l} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8.2).$$

Aus (8.2) bekommen wir die gesuchte Beziehung, wenn wir die Forderung auf $\hat{\Pi}$ in der Form (3.8) anwenden, unter Beachtung der Tatsache, daß l vor den Integralen, als obere Grenze der Integrale und als Parameter in w vorkommt, oder — sehr viel bequemer — indem wir unmittelbar die ausintegrierte Form (7.2) benutzen:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial l} = \left(\varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2}\right)\frac{\pi^2 f^2}{4} \cdot \frac{2}{l^3} - \frac{i^2 \pi^4 f^2}{l^5} = -\frac{\pi^2 f^2}{2 l^3}\left[-\left(\varepsilon - \frac{\pi^2 f^2}{4 l^2}\right) + 2\frac{i^2 \pi^2}{l^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (8.3).$$

Aus (8.3) und (7.5) folgt dann

$$\frac{i^2 \pi^2}{l^2} = k\frac{l^2}{\pi^2}$$

oder

$$l^4 = \frac{i^2 \pi^4}{k} = \frac{E}{K} i^2 \pi^4 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8.4).$$

Die Wellenlänge l ist von ε bzw. f unabhängig; sie behält also auch oberhalb der kritischen Stauchung den Wert, den sie am kritischen Punkte selbst annimmt.

[17]) S. o. S. 65.

[18]) $\Pi(f + \delta f) - \Pi(f) = \frac{\partial \Pi}{\partial f}\delta f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial f^2}(\delta f)^2 + \cdots$, also $\delta^2 \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial f^2}(\delta f)^2$.

Das Ergebnis (8.4) erhält man gewöhnlich aus der Forderung, daß am kritischen Punkte ($f=0$) ε nach Gl. (7.5), also

$$\varepsilon_k = i^2 \frac{\pi^2}{l^2} + k \frac{l^2}{\pi^2}$$

bezüglich l einen Kleinstwert haben solle:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial l} = -\frac{2 i^2 \pi^2}{l^3} + 2 k \frac{l}{\pi^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.5),$$

woraus (8.4) unmittelbar folgt.

Die Bedingung (8.5) wird als eine anschaulich sehr naheliegende Forderung meist nicht näher begründet. Nach unseren früheren Überlegungen ist sie gleichwertig mit der Forderung, daß (am kritischen Punkte) die zweite Variation von $\hat{\Pi}$ ein Minimum bezügl. l haben müsse. Aus (7.2) bzw. (5.3) folgt nämlich:

$$\delta^2 \hat{\Pi} = -\varepsilon_k \frac{\pi^2 (\delta f)^2}{2 l^2} + \frac{i^2 \pi^4 (\delta f)^2}{2 l^4} + \frac{k (\delta f)^2}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.6);$$

nun ist

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial l} = -\frac{\frac{\partial}{\partial l}(\delta^2 \hat{\Pi})}{\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k}(\delta^2 \hat{\Pi})},$$

und daher sagt (8.5) in der Tat nichts anderes aus als

$$\frac{\partial}{\partial l}(\delta^2 \hat{\Pi}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.7).$$

Man beachte aber, daß aus (8.7) bzw. (8.5) nur der kritische Wert von l bestimmt werden kann, während man aus (8.3) seinen Wert für beliebig vorgegebenes ε erhält.

9. Verhalten des Stabes bei sehr großen Ausbiegungen (Ansatz (3.3).) Die bisherigen Untersuchungen haben u. a. zu dem Ergebnis geführt, daß die Last oberhalb der Knickgrenze exakt konstant bleibt

$$p = E \varepsilon^* = E\left(\frac{i^2 \pi^2}{l^2} + k \frac{l^2}{\pi^2}\right).$$

Das ist natürlich nur so lange richtig, als das elastische Verhalten des Balkens durch den Ansatz (3.5) für die Formänderungsenergie hinreichend genau gekennzeichnet ist. Bei größeren Ausbiegungen ist das nicht mehr der Fall, weil dann die Glieder $(f/l)^6$ nicht mehr vernachlässigbar klein sind gegen die Glieder $(f/l)^4$; man erfaßt (in zweiter Näherung) die Veränderlichkeit der Druckkraft, wenn man auf die Ansätze (3.3) und (3.4) zurückgreift.

Die Differentialgleichungen, die aus (3.3) auf Grund der Forderung $\delta \hat{\Pi} = 0$ entstehen, lassen sich ohne Schwierigkeit angeben; als erste Gleichung findet man (bis auf Glieder höherer Ordnung):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + \frac{w_x^4}{8}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.1),$$

und wenn man

$$u_x + \frac{w_x^2}{2} + \frac{w_x^4}{8} = \text{const} = -\hat{\varepsilon}$$

in die zweite gleich einführt, ergibt sich dort (wir beschränken uns auf den Fall $k=0$):

$$w_{xxxx} + \left[\frac{\hat{\varepsilon}}{i^2}(1 - \varepsilon^{*}) + \zeta(x)\right] w_{xx} = 0, \quad \text{mit} \quad \zeta(x) = 2 w_x \cdot w_{xxx} + w_{xx}^2 - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{l^2} w_x^2 \quad . \quad (9.2)$$

(wieder bis auf Glieder höherer Ordnung). Eine exakte Integration der Gl. (9.2) ist wohl nicht möglich. Da aber die neu hinzukommenden Glieder gegen die früheren (Gl. 4.4) im Verhältnis $(f/l)^2$ klein sind (d. h. doch nur Korrekturglieder darstellen), ist es praktisch vollkommen ausreichend, ihren Einfluß näherungsweise zu erfassen. Am schnellsten führt hier das Ritzsche Verfahren zum Ziel.

Als Ansatz wählen wir die Lösung der früheren, „nächst niederen", Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} w &= f \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_x + \frac{w_x^2}{2} &= -\varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9.3).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\pi^2 f^2}{4 l^2} = \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9.4),$$

so besteht zwischen der (unbekannten) Integrationskonstanten und der als gegeben zu denkenden Verschiebung des rechten Stabendes $u(l) = -\varepsilon l$ wieder der Zusammenhang (4.9'):

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9.5)^{19)}.$$

Gehen wir mit (9.3) in (3.3) ein, so ergibt sich

$$\Pi = \frac{EF}{2} \int_0^l \left[\varepsilon_0 \left\{ \varepsilon_0 (1 - w_x^2) - \frac{w_x^4}{4} \right\} + i^2 \{ w_{xx}^2 (1 + 2\varepsilon_0 - w_x^2) + 2 w_x^2 w_{xx}^2 \} \right] dx + P u(l),$$

oder

$$\hat{\Pi} = \frac{\Pi}{E F l} = \frac{\varepsilon_0^2}{2} - \varepsilon_0^2 \varphi - \frac{3}{4} \varepsilon_0 \varphi^2 + \varepsilon^* \varphi \{ 1 + 2\varepsilon_0 + \varphi \} - \frac{p}{E} \varepsilon .$$

Bei Beachtung von (9.5) liefern die Minimalforderungen

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \varphi} = 0,$$

für den Zusammenhang zwischen p, ε^* und φ die beiden Gleichungen

$$\varepsilon_0 (1 - 2\varphi) - \frac{3}{4} \varphi^2 + 2 \varepsilon^* \varphi - \frac{p}{E} = 0,$$

$$-\varepsilon_0 (1 - 2\varphi + \varepsilon_0) + \frac{3}{4} \varphi^2 - \frac{3}{2} \varepsilon_0 \varphi + \varepsilon^* (1 - 2\varepsilon_0 + 2\varphi - 2\varphi) = 0.$$

Aus der zweiten folgt[20])

$$\varepsilon_0 = \varepsilon^* (1 + \varepsilon^* + \varphi/2) + 3/4\, \varphi^2,$$

und aus der ersten damit

$$\frac{p}{E} = \varepsilon^* \left(1 + \varepsilon^* + \frac{\varphi}{2} \right) + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Es ist also[21])

$$p = E \varepsilon^* \left(1 + \varepsilon^* + \frac{\pi^2 f^2}{8 l^2} \right), \qquad P = \frac{E I \pi^2}{l^2} \left(1 + \frac{\pi^2 i^2}{l^2} + \frac{\pi^2 f^2}{8 l^2} \right) \quad \ldots \ldots \quad (9.6).$$

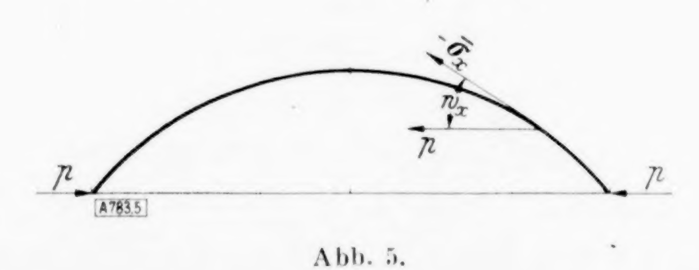


Abb. 5.

Zum gleichen Ergebnis gelangen wir auf dem Umweg über die Differentialgleichungen (9.1) und (9.2). — Die erste Gleichung sagt aus, daß (s. Abb. 5) die Horizontalkraft

---

[19]) In den Bezeichnungen der Abb. 2: $\xi^2 = \alpha - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^*}$.

[20]) In Abb. 2 also (nach 9.6): $\alpha = 1 + \varepsilon^* + \xi^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{3}{4} \varepsilon^* \xi^2\right)$.

[21]) In Abb. 2 $\frac{p}{p^*} = 1 + \varepsilon^* \left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right) = 1 + \varepsilon^* \left(1 + \frac{\alpha - 1}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{ll} & p = -\dfrac{\bar{\sigma}_x}{1 - \dfrac{w_x{}^2}{2}} = E\left(u_x + \dfrac{w_x{}^2}{2} + \dfrac{w_x{}^2}{8}\right) \text{ (s. Gl. (3.4))} \\ \text{konstant sein muß:} & p = E\,\hat{\varepsilon} = \text{const} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9.7)$$

und nach Galerkin[22]) erhalten wir aus der zweiten Gleichung durch Multiplikation mit w und Integration unter Verwendung des Ansatzes (9.3)

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon^* \, (1 + \varepsilon^* + \varphi/2),$$

d. h. wieder die Beziehung (9.6).

Man sieht aus (9.7), daß die kritische Spannung

$$p_k = E\,\varepsilon^* \, (1 + \varepsilon^*) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9.8).$$

etwas höher ist, als nach der elementaren Theorie. Die sehr geringfügige Erhöhung rührt her von der Vergrößerung des Biegeanteiles um $(1 + 2\,\varepsilon^*)$, der eine Vergrößerung des Dehnungsanteils um $(1 + \varepsilon^*)$ entgegensteht. Die nach der Überschreitung des kritischen Punktes eintretende elastische Druckerhöhung

$$p = p_k \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{8\,l^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9.9)$$

ist ebenfalls sehr klein.

Bezeichnen wir die Erhöhung in Prozenten mit ψ:

$$\psi = 100 \, \frac{p - p_k}{p_k},$$

so ist

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{10\,\pi} \sqrt{8\,\psi},$$

und die zu dieser Durchbiegung gehörige Biegespannung wird

$$\hat{\sigma} = E\,w'' \, \frac{h}{2} \approx E \, \frac{h}{l} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{f}{l} = 0{,}444 \, E \, \frac{h}{l} \sqrt{\psi} \quad (h = \text{Höhe des Balkens}),$$

bleibt also bei einigen Prozent Überschreitung nur für ein sehr kleines Verhältnis $\frac{h}{l}$ im elastischen Bereich.

Anhang.

Verhalten des Stabes im überkritischen Bereich nach Trefftz. Gl. (9.9) ist in Übereinstimmung mit dem Näherungs-Ergebnis der sogen. „exakten Theorie" des Eulerstabes[1]). Diese Theorie geht aus von der „exakten" Differentialgleichung des ausgeknickten Stabes

$$P\,w + \frac{E\,J}{\varrho} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

$\left(\text{mit } \dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{w_{xx}}{(\sqrt{1 + w_x{}^2})^3}\right)$, die sich mit Hilfe elliptischer Funktionen integrieren läßt[2]).

Ein anderer — sehr einfacher — Weg zur Herleitung der Gl. (9.9) wurde von E. Trefftz angegeben. Ausgehend von der Voraussetzung, daß die Bogenlänge des Balkens bei der Verformung sich nicht ändere, benutzt Trefftz das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Form

$$\delta\,(A_i + V) = \delta\,A_i - P\,\delta\,u = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

[22]) S. z. B. ZAMM 16 (1936), S. 353/354.

[1]) Hdb. der Physik VI, S. 202, Gl. (10).

[2]) Hdb. der Physik VI, S. 201.

dabei ist A_i die Arbeit der Biegung, δu die Verschiebung des Endpunktes infolge der Ausbiegungen w, P die (bei der Variation konstant zu haltende) Druckkraft. Als Längskoordinate führt Trefftz an Stelle von x die Bogenlänge s ein; dann wird

$$A_i = \frac{1}{2}\int_0^l E\,I\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 d\,s, \qquad P\,u = P\int_0^l \left(1-\frac{d\,x}{d\,s}\right) d\,s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

wofür sich wegen

$$\left.\begin{aligned} d\,s^2 &= d\,x^2 + d\,w^2, \text{ also } \frac{d\,x}{d\,s} = \sqrt{1-w_s^2} \approx 1 - \frac{1}{2}w_s^2 - \frac{1}{8}w_s^4 \\ \text{und } \left(\frac{1}{\varrho}\right) &= \frac{d \operatorname{arc} \sin w_s}{d\,s} = \frac{w_{s\,s}}{\sqrt{1-w_s^2}} \approx w_{s\,s}\,(1+w_s^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

schreiben läßt:

$$A_i = \frac{1}{2}\,E\,I\int_0^l w_{s\,s}^2\,(1+w_s^2)\,d\,s, \qquad P\,u = \frac{P}{2}\int_0^l \left(w_s^2 - \frac{1}{4}w_s^4\right) d\,s \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Macht man nun für w den Ritz-Ansatz

$$w = f \sin \frac{\pi\,x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

so lassen sich die beiden Integrale (5) ausführen:

$$A_i = \frac{E\,I}{2}\left\{\frac{\pi^4 f^2}{2\,l^3} + \frac{\pi^6 f^6}{8\,l^5}\right\}, \qquad P\,u = P\left\{\frac{\pi^2 f^2}{4\,l} + \frac{3}{64}\frac{\pi^4 f^4}{l^3}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

und die Forderung

$$\delta\,(A_i + V) = \delta\,(A_i - P\,u) = \frac{d}{d\,f}\,(A_i - P\,u)\,\delta f = 0$$

liefert

$$\frac{E\,I\,\pi^2}{l^2}\cdot\frac{\pi^2 f}{2\,l}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\pi^2 f^2}{l^2}\right\} = P\,\frac{\pi^2 f}{2\,l}\left\{1+\frac{3}{8}\frac{\pi^2 f^2}{l^2}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8);$$

also entweder

$$f = 0,$$

oder

$$P = \frac{E\,I\,\pi^2}{l^2}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi^2 f^2}{l^2}}{1+\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi^2 f^2}{l^2}} = E\,F\,\varepsilon^*\left(1+\frac{\pi^2 f^2}{8\,l^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Gl. (9) stimmt bis auf den (hier fehlenden) Faktor $(1+\varepsilon^*)$ mit dem auf unserem systematischen Wege gewonnenen Ergebnis (9.9) überein.

Zusammenfassung. Am Beispiel des (elastisch gebetteten) Druckstabes wird gezeigt, daß der Unterschied zwischen den Stabilitätsproblemen und den Problemen der „linearisierten" Elastizitätstheorie daher rührt, daß bei den Stabilitätsproblemen der Ansatz für die Formänderungsenergie Glieder von höherer als der zweiten Ordnung in den Verschiebungen enthält. — Diese Auffassung gestattet den Zusammenhang herzustellen zwischen der Energiemethode in der für Stabilitätsuntersuchungen meist benutzten speziellen Form und dem Prinzip der virtuellen Verrückungen in seiner allgemeinen elastizitätstheoretischen Fassung; überdies klärt sie das Verhalten des Stabes bei Überschreiten der kritischen Stauchung.

Das Verhalten der Hauptspannungen in der Umgebung einer Verzweigungsstelle.

Von *R. v. Mises* in Istanbul.

Der Teilnahme an einer Ehrung des Andenkens meines langjährigen Freundes, früheren Schülers und späteren Nachfolgers Erich Trefftz will ich mich nicht entziehen. Es sind jetzt fast genau 27 Jahre, seit in dem Straßburger mathematischen Seminar, das unter Leitung Heinrich Webers stand, ein fortgeschrittener Student zum erstenmal das Wort nahm, der sofort die Aufmerksamkeit aller Dozenten auf sich zog. Kurz darauf begann Trefftz seine später sehr bekannt gewordene Doktorarbeit, die er rasch zu Ende führte. Seit jenen Tagen sind wir niemals außer Kontakt gekommen und ich habe in ihm, der 1921 mein Nachfolger auf dem Dresdner Lehrstuhl wurde und der 1933 auf meinen Wunsch die Leitung dieser Zeitschrift übernahm, einen treuen und aufrichtigen Freund gefunden. Wenn auf anderen Blättern dieses Heftes der Lebensgang und die wissenschaftlichen Leistungen von Trefftz gewürdigt werden, so will ich hier nur zwei Worte hinzufügen: Er war ein klarer Kopf und er war ein zuverlässiger Mensch.

Die folgende anspruchslose Bemerkung geht auf eine Fragestellung zurück, die vor einer Reihe von Jahren einmal zwischen Trefftz und mir mündlich erörtert wurde: Wie verlaufen in einem ebenen Gleichgewichtsfeld die Hauptspannungswerte in der Umgebung einer Stelle, in der sie beide gleich groß sind? Schreitet man vom Verzweigungspunkt in irgendeiner Richtung fort, so sind drei Fälle denkbar: daß beide Spannungen wachsen, daß beide abnehmen und daß die eine zu-, die andere abnimmt. Die Frage ist, ob die drei Fälle, wie es bei einem regulären Punkt zutrifft, gleichzeitig (für die verschiedenen Richtungen) vorliegen können oder nicht? Gelegentlich einer ganz anders gerichteteten Untersuchung fand ich die Antwort auf diese Fragen, die ich hier vorlege.

1. Wir nehmen den Verzweigungspunkt zum Koordinatenanfang und nennen σ_0 die hier herrschende Spannung für irgendeine Richtung. Für die Komponenten des Spannungstensors im Punkte x, y machen wir den linearen Ansatz (Singularität erster Ordnung):

$$\sigma_x = \sigma_0 + a_1 x + b_1 y, \qquad \sigma_y = \sigma_0 + a_2 y + b_2 x, \qquad \tau = a_3 x + b_3 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wobei zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen erforderlich ist

$$a_1 + b_3 = 0, \qquad a_2 + a_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ziehen wir von dem Spannungstensor $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$ den Kugeltensor $(\sigma_0, \sigma_0, 0)$ ab, so hat der übrigbleibende Tensor die Hauptwerte $\sigma_1 - \sigma_0$ und $\sigma_2 - \sigma_0$ und es gilt nach bekannten Sätzen:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_0) &= (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) = (a_1 + b_2)\,x + (a_2 + b_1)\,y \\ (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0) &= (\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0) - \tau^2 = (a_1 x + b_1 y)(a_2 y + b_2 x) - (a_2 x + a_1 y)^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2^2)\,x^2 + (b_1 b_2 - a_1 a_2)\,x\,y + (a_2 b_1 - a_1^2)\,y^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3).$$

Demnach sind $\sigma_1 - \sigma_0$ und $\sigma_2 - \sigma_0$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung in z:

$$z^2 - z\,[(a_1 + b_2)\,x + (a_2 + b_1)\,y] + (a_1 b_2 - a_2^2)\,x^2 + (b_1 b_2 - a_1 a_2)\,x\,y + (a_2 b_1 - a_1^2)\,y^2 = 0 \quad . \quad (4).$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels zweiten Grades in $x\,y\,z$. Die Fläche also, die σ_1 und σ_2 als Funktionen von x, y zeigt, verhält sich in der Umgebung der Verzweigungsstelle wie ein Kegel zweiten Grades. Mit anderen Worten: Die beiden Flächen, die im regulären Gebiet σ_1 bzw. σ_2 als Funktionen von x, y darstellen, vereinigen sich an der singulären Stelle derart, daß sie in die beiden Teile eines und desselben Kegels übergehen.

2. Da die allgemeine Kegelgleichung 5 Parameter enthält, während unsere Gl. (4) deren nur 4 aufweist, so muß der Kegel (4) irgendwie spezialisiert sein. Es ist ja auch von vornherein aus der Fragestellung klar, daß die z-Achse im Innern des Kegels verlaufen muß, da es sonst Richtungen gäbe, in denen σ_1, σ_2 nicht reell sind. Die Rechnung[1]) ergibt nun folgendes: Hat der Schnitt des Kegels mit einer Parallelen zur x-y-Ebene die Halbachsenquadrate a^2, b^2, so liegt der Kegelschnitt so, daß der Durchstoßpunkt 0 der z-Achse den Durchmesser, auf dem er liegt, im Verhältnis $a^2 : b^2$ (bei der Ellipse von innen, bei der Hyperbel von außen) teilt. Die so bestimmte vierparametrige Schar von Kegelschnitten enthält Kreise nur mit dem Mittelpunkt in 0. Ellipsen haben ihren Mittelpunkt in um so größerer relativer Entfernung von 0, je weiter ihr Achsenverhältnis von 1 verschieden

[1]) Man bringt die Gleichung auf Hauptachsen, indem man $a_1 a_2 = b_1 b_2$ voraussetzt; dann rechnet man nach bekannten Formeln die Koordinaten x_0, y_0 des Mittelpunktes und die Halbachsenlängen aus und findet leicht, daß zwischen diesen Größen die Gleichung

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2$$

besteht.

ist. Bei Hyperbeln ist es umgekehrt, ihre Entfernung von 0 wird größer, wenn das Achsenverhältnis sich der Einheit nähert. Gleichseitige Hyperbeln sind ausgeschlossen, wohl aber können beliebig gelegene Paare sich rechtwinklig kreuzender gerader Linien auftreten. Eine Parabel mit dem Parameter p gehört der Schar an, wenn der Punkt 0 in der Achsrichtung um das Stück $2p$ von der Parabellinie nach innen verschoben ist. Endlich gehören beliebige Geradenpaare mit dem Schnittpunkt in 0 zur Schar. Abb. 1 zeigt diese verschiedenen Möglichkeiten.

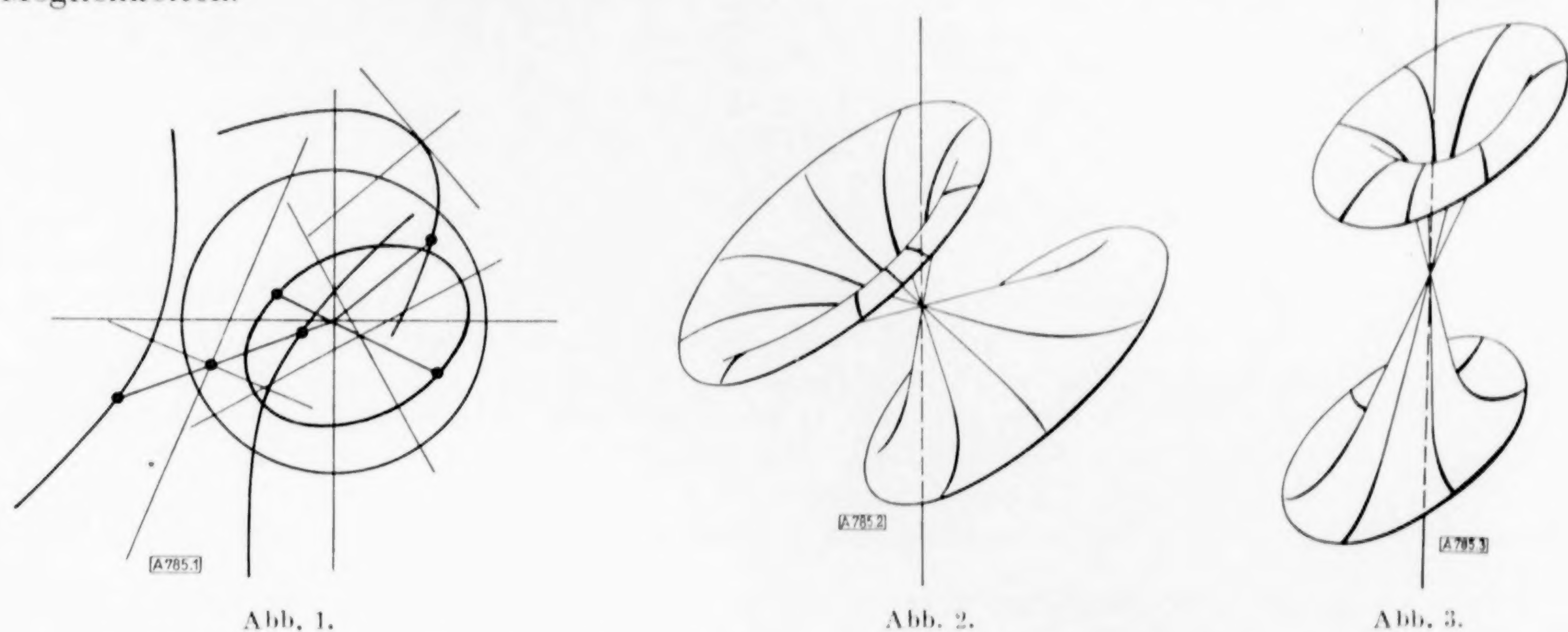


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

3. Sieht man von allen Ausartungen ab, so bleiben die Fälle der Ellipse und der Hyperbel übrig; ihnen entsprechen die Skizzen der Abb. 2 und 3 für die Flächen, die σ_1 und σ_2 als Funktionen von x, y in der Umgebung der Verzweigungsstelle darstellen. Die eingangs gestellte Frage läßt sich jetzt dahin beantworten: Im elliptischen Fall gibt es auf jeder Geraden durch den singulären Punkt einen σ_0 übertreffenden und einen σ_0 unterschreitenden Hauptspannungswert in jedem Punkt. Im hyperbolischen Fall bleibt längs zweier bestimmter Geraden ein Hauptspannungswert stationär; durch diese Geraden werden in der Umgebung des Verzweigungspunktes zwei Winkelräume abgeteilt, von denen der eine nur Hauptspannungswerte größer als σ_0, der andere nur solche kleiner als σ_0 aufweist. Von den Kegeln selbst ist noch zu sagen, daß im hyperbolischen Fall jeder Axialschnitt eine Öffnung von mehr als 90° haben muß, während im elliptischen Fall u. a. ein gerader Kreiskegel von beliebigem Öffnungswinkel auftreten kann.

4. Es liegt nahe, zu fragen, wie die Unterscheidung in elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Fall mit den drei verschiedenen Typen des Verlaufs der Spannungstrajektorien in der Umgebung des Verzweigungspunktes zusammenhängt. Bekanntlich gilt für den Neigungswinkel ϑ der Trajektorie gegenüber der x-Achse

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{(5)}.$$

Setzt man hier die Werte aus (1) und (2) und schreibt y' für $\operatorname{tg}\vartheta$, so erhält man die Differentialgleichung der Trajektorien in der Form

$$y' - \frac{1}{y'} = \frac{(a_1 - b_2)x + (b_1 - a_2)y}{a_2 x + a_1 y} \quad \text{(6)}.$$

Die Bedingung $y' = y/x$ führt auf eine Gleichung dritten Grades für y', die mindestens eine reelle Wurzel haben muß. Macht man diese selbstentsprechende Richtung zur x-Achse, so muß $a_2 = 0$ sein. Schreibt man dann noch β_1 für b_1/a_1 und β_2 für b_2/a_1, so geht (5) über in

$$y' - \frac{1}{y'} = \frac{(1-\beta_2)x + \beta_1 y}{y} = \beta_1 + (1-\beta_2)\frac{x}{y} \quad \text{(6)}.$$

Man hat nun die drei Fälle zu unterscheiden:

a) $\beta_1^2 + 4(2-\beta_2) < 0$, b) $\beta_2 - 1 > 0$, $\beta_1^2 + 4(2-\beta_2) > 0$, c) $\beta_2 - 1 < 0$.

Im Falle a) gibt es außer der x-Achse keine selbstentsprechenden Richtungen, in den Fällen b) und c) hat man im ganzen drei solcher Richtungen, die im Falle b) sämtlich innerhalb eines Quadranten liegen. Der Verlauf der Trajektorien in der Umgebung des Verzweigungspunktes wird durch Abb. 4 gekennzeichnet[2]).

[2]) Vgl. dazu L. Föppl: Mitteilungen d. Mechanisch-Technischen Laboratoriums München, H. 34, S. 1. Hier treten in der Diskussion die drei Fälle nicht deutlich hervor.

Führt man andrerseits $a_2 = 0$ und die Abkürzungen β_1, β_2 in die Kegelgleichung (4) ein, so wird die Unterscheidung in die drei Typen Ellipse, Parabel, Hyperbel durch

$$\beta_1^2\,\beta_2^2 + 4\,\beta_2 \lesseqgtr 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

bestimmt. Man sieht, daß das elliptische Gebiet, begrenzt durch $\beta_2 = 0$ und $\beta_1^2\,\beta_2 + 4 = 0$, ganz im Innern des Gebietes c) verläuft; denn es ist hier $\beta_2 < 0 < 1$. Ebenso gehören die parabolischen Grenzfälle mit $\beta_2 = 0$ und $\beta_1^2\,\beta_2 + 4 = 0$ zu c), während das hyperbolische Gebiet Teile von c) und ganz a) und b) umfaßt. (Vgl. Abb. 5. Die Parabel dieser Figur kann auch

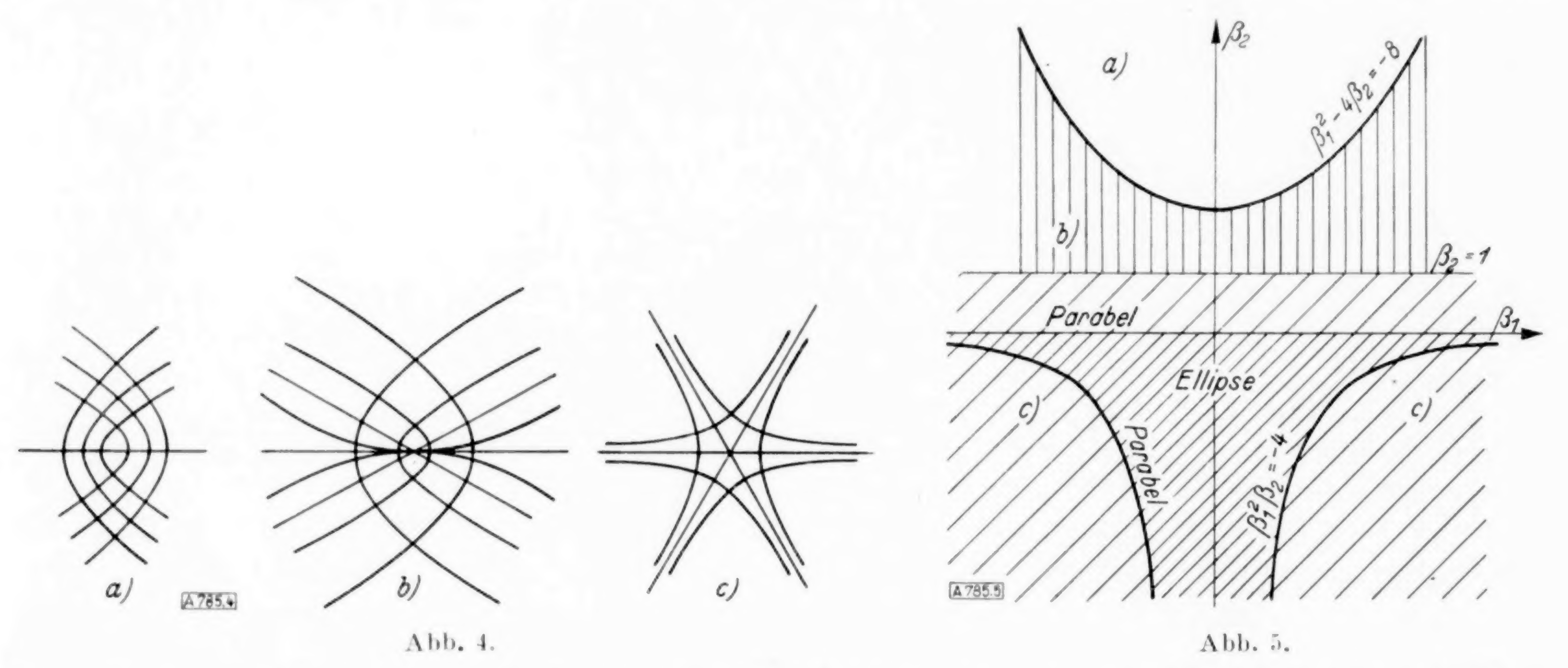


Abb. 4. Abb. 5.

dazu dienen, bei gegebenen β_1, β_2 zu einem beliebigen $\operatorname{tg}\varphi = y : x$ die zugehörigen beiden y'-Werte zu finden. Man braucht nur vom Punkt β_1, β_2 eine Gerade unter dem Winkel φ zu ziehen und mit der β_1-Achse zu schneiden; die vom Schnittpunkt an die Parabel gezogenen Tangenten liefern die beiden zueinander senkrechten y'-Richtungen.)

5. Der lineare Ansatz (1) bedeutete, daß wir eine singuläre Stelle erster Ordnung in Betracht zogen. Wir wollen noch einen Blick auf den Fall der Singularität zweiter Ordnung werfen, in dem alle linearen Glieder in der Entwicklung von σ_x, σ_y, τ verschwinden, also

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 = a_1\,x^2 + 2\,b_1\,x\,y + c_1\,y^2, \qquad \sigma_y - \sigma_0 = a_2\,x^2 + 2\,b_2\,x\,y + c^2\,y^2 \\ \tau = a_3\,x^2 + 2\,b_3\,x\,y + c_3\,y^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zu setzen ist. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen, die für alle x, y erfüllt sein müssen, erfordern

$$a_3 = -b_2\,, \qquad b_3 = -a_1 = -c_2\,, \qquad c_3 = -b_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Hier greift aber auch schon die Elastizitätsbedingung $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ ein, die beim linearen Ansatz noch identisch erfüllt ist, und liefert

$$a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Durch (9) und (10) wird die Zahl der unabhängigen Parameter von 8 auf 4 herabgesetzt. Man kann schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 = -\frac{a_2 + c_1}{2}\,x^2 + 2\,b_1\,x\,y + c_1\,y^2, \qquad \sigma_y - \sigma_0 = a_2\,x^2 + 2\,b_2\,x\,y - \frac{a_2 + c_1}{2}\,y^2, \\ \tau = -b_2\,x^2 + (a_2 + c_1)\,x\,y - b_1\,y^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (11).$$

Rechnen wir jetzt in gleicher Weise wie in (3) die Summe und das Produkt von $\sigma_1 - \sigma_0$ und $\sigma_2 - \sigma_0$, so erhalten wir für die Summe eine quadratische Form $Q(x, y)$ und für das Produkt eine Form 4. Grades $P(x, y)$, beide bestimmt durch die 4 Konstanten a_2, b_1, b_2, c_1. Die Werte $\sigma_1 - \sigma_0$ und $\sigma_2 - \sigma_0$ erscheinen wieder als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$z^2 - z\,Q(x, y) + P(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Dies ist eine Flächengleichung 4. Grades in x, y, z. Die darstellende Fläche ist dadurch gekennzeichnet, daß jeder Vertikalschnitt aus zwei Parabelbögen besteht, die sich im Nullpunkt von innen oder außen berühren; denn $y = \varkappa\,x$ in (12) eingeführt, liefert im allgemeinen zwei von $\varkappa$ abhängige Werte für den Quotienten $z : x^2$. Die Hauptspannungsfläche besteht also aus zwei Schalen, die sich an der singulären Stelle mit horizontaler Tangentialebene berühren. Auf die weitere Diskussion dieses Falles gehen wir hier nicht ein.

Zur Berechnung der Grenzschichten.

Von *L. Prandtl* in Göttingen.

1. Die Aufgabe. In Flüssigkeitsströmungen mit kleiner Zähigkeit (großer Reynoldsscher Zahl) ist das Feld der Zähigkeitskräfte häufig auf eine schmale Zone in der Nähe der Körperoberfläche beschränkt. In diesem Fall kann man zur Erleichterung der Rechnung folgende Annahmen machen:

1. In dem Reibungsbereich, den man Grenzschicht nennt, werden jeweils nur die stärksten Glieder der Zähigkeitskraft $\mu \Delta \mathfrak{w}$ berücksichtigt (es wird also z. B. bei der x-Komponente dieser Kraft, $\mu \Delta u$, wenn die Hauptströmungsrichtung parallel zur Wand als x-Richtung und die Richtung senkrecht zur Wand als y-Richtung gewählt wird, $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ gegen $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ vernachlässigt).

2. Außerhalb der Grenzschicht wird die Strömung als reibungslos behandelt und es wird wegen der geringen Ausdehnung der Grenzschicht senkrecht zur Wand der Druck in dieser Schicht gleich demjenigen gesetzt, den die zugehörige reibungsfreie Strömung an der Wand liefern würde[1]). Der geringe Gang des Druckes mit dem Wandabstand innerhalb der Grenzschicht wird dabei vernachlässigt, der Druck also als gegebene Funktion der Grundrißkoordinaten (x und z) betrachtet.

Für eine durchschnittliche Geschwindigkeit u_0 der äußeren Strömung und eine beströmte Länge l ergibt die Rechnung für die „Grenzschichtdicke" δ die Größenordnung $l\sqrt{\frac{\nu}{u_0 l}} = l/\sqrt{Re}$ ($\nu = \mu/\varrho$ = kinematische Zähigkeit).

Für den zweidimensionalen Fall erhält man mit x = Bogenlänge in der Strömungsrichtung längs der Wand gemessen und y = senkrechtem Abstand an der Wand die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}\frac{d p}{d x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Am meisten interessiert der stationäre Fall $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$. Die Literatur über diesen ist schon recht reichhaltig[2]), und doch ist eine wichtige Aufgabe bisher noch nicht befriedigend gelöst, nämlich die Weiterentwicklung eines vorgegebenen Geschwindigkeitsprofils bei vorgegebenem Druckverlauf. Von dieser Aufgabe soll im folgenden allein die Rede sein. In mathematischer Sprache lautet sie wie folgt: „Gegeben sei das Geschwindigkeitsprofil $u(x_0, y)$ für den „Anfangsquerschnitt" $x = x_0$, und außerdem $\frac{1}{\varrho}\frac{d p}{d x} = \nu f(x)$ für $x \geqq x_0$; gesucht $u(x, y)$ für $x > x_0$."

2. Eigenschaften der stationären Grenzschichtströmung. Die bekannten Lösungen tragen zu dieser Aufgabe nichts bei, denn sie enthalten nur Potenzentwicklungen nach x von einem Anfangsquerschnitt aus, in dem $u = 0$ oder u = const ist (Staupunktströmung und Anströmung einer Schneide mit Schneidenwinkel Null). Andererseits kann man sich darauf berufen, daß — von dem Fall der Strömungsablösung abgesehen — die Existenz der Lösung „physikalisch evident" ist: ein durch irgendeine Vorgeschichte entstandenes Grenzschichtprofil muß sich, solange keine Ablösung auftritt, irgendwie weiterentwickeln! Die Mathematik gibt zu dieser Frage die folgende Antwort, die ich bei der ersten Veröffentlichung auf dem Mathematikerkongreß zu Heidelberg 1904 schon besessen habe[3]): Unter Benützung von Gl. (2) läßt sich in

[1]) Genauer müßte man die reibungsfreie Strömung an einem um die „Verdrängungsdicke" $\delta^* = \frac{1}{u_1}\int_0^\delta (u_1 - u)\,d y$ verdickten Körper nehmen.

[2]) Zusammenfassende Darstellungen findet man in dem Tollmienschen Bericht im Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, 1, S. 241, ferner bei L. Howarth: Techn. Report of the Aeron. Research-Comm. for 1934, Vol. I, S. 320 (1936), eine lehrhafte Einführung in dem Beitrag des Verfassers in Durand, Aerodynamic Theory, Vol. III, S. 80—119.

[3]) In dem Vortragstext (Verh. d. III. Intern. Math. Kongresses, Leipzig 1905, vgl. auch den Neudruck in Prandtl-Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen 1927, heißt es auf S. 487 bzw. S. 4 nach Anführung der obigen Gl. (1) und (2): „Ist, wie gewöhnlich $\frac{d p}{d x}$ durchaus gegeben, ferner für den Anfangsquerschnitt der Verlauf von u, so läßt sich jede derartige Aufgabe numerisch bewältigen, indem man durch Quadraturen aus jedem u das zugehörige $\frac{\partial u}{\partial x}$ gewinnen kann; damit kann man mit Hilfe eines der bekannten Näherungsverfahren immer wieder einen Schritt in der X-Richtung weiterkommen. Eine Schwierigkeit besteht dabei allerdings in verschiedenen am festen Rande auftretenden Singularitäten."

Gl. (1) für $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ schreiben: $v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} = - u^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{u}\right)$; es wird also

$$\frac{v}{u} = \nu \int_{y_0}^{y} \frac{1}{u^2}\left(f(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\,y + \varphi\,(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

$\frac{v}{u}$ ist die Neigung der Stromlinie gegen die x-Achse. Ist die x-Achse selbst die Wand, so muß für $y = y_0 = 0$ $\frac{v}{u} = 0$ sein, d. h. $\varphi\,(x) = 0$. Man erkennt im übrigen als Nebenprodukt dieser Betrachtung, daß in Gl. (3) auch der Fall einer (leicht) welligen Wand mit enthalten ist, die von der x-Achse verschieden ist. Es ist dann

$$\frac{d\,y_0}{d\,x} = \left(\frac{v}{u}\right)_{y = y_0} = \varphi\,(x)\,, \qquad \text{was zu} \qquad y_0\,(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi\,(x)\, d\,x$$

als Gleichung für die Wand führt. Das hier erhaltene Nebenresultat läßt sich auch so aussprechen, daß, wenn $u\,(x, y)$ eine Lösung des Systems (1), (2) ist, dann auch $u\,(x, y - y_0\,(x))$ eine Lösung ist. Dies läßt sich natürlich auch unmittelbar aus dem System (1), (2) beweisen.

Die Bedeutung der Beziehung (3) für unser Problem liegt jedoch darin, daß man aus ihr $\frac{\partial v}{\partial y}$ und damit mittels (2) $\frac{\partial u}{\partial x}$ gewinnen kann. Für $\varphi\,(x) = 0$ ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial}{\partial y}\left[u \int \frac{1}{u^2}\left(- f(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) d\,y\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur Differentiation und Integration nach y, kann also für ein Anfangsprofil $u = u\,(x_0, y)$ fertig ausgerechnet werden. Sie liefert für dieses Anfangsprofil $\frac{\partial u}{\partial x}$ und daher die Möglichkeit, nach x fortzuschreiten, falls $\frac{\partial u}{\partial x}$ beschränkt ist. Man erhält ein neues u für $x_0 + \Delta x$:

$$u\,(x_0 + \Delta x,\ y) = u\,(x_0, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y)\ \Delta x\,.$$

Das Verfahren läßt sich für dieses neue Profil wieder anwenden und liefert ein $u\,(x_0 + 2\,\Delta x,\ y)$ usw. Damit ist die Existenz der Lösung für alle Bereiche nachgewiesen, in denen u positiv bleibt. Man erkennt aber leicht, daß die Methode versagt, wenn irgendwo u durch Null geht, da der Integrand dort quadratisch unendlich wird. Nun ist aber längs der Wand, also für $\varphi\,(x) = 0$ längs der x-Achse, $u = 0$ wegen des Haftens der Flüssigkeit an der Wand. Die Lage wird hier dadurch erleichtert, daß gleichzeitig v quadratisch Null wird[4]). Ein Blick auf Gl. (3) zeigt nun, daß die Funktion $\frac{v}{u}$ nur dann regulär ist, wenn der Integrand überall endlich ist. Das verlangt aber, daß an der Wand der Ausdruck $f\,(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ quadratisch verschwindet, d. h. daß $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{x = x_0} = f\,(x)$ und $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{x = x_0} = 0$ wird. Die Auswertung des Limes gibt dann $-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big/ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)_{x = x_0}$. Damit wird aus (4) der Grenzwert von $\frac{1}{y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ für $x = x_0$, $y = 0$ zu $+\nu\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big/ \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x = x_0}$ erhalten. Das heißt aber, daß

1. der zweite und dritte Differentialquotient des Ausgangsprofils bei $y = 0$ gar nicht beliebig sein dürfen, sondern $= f\,(x_0)$ und 0 sein müssen,

2. für die Weiterentwicklung des Profils der vierte Differentialquotient bei $y = 0$ entscheidend ist.

---

[4]) Mit u ist auch $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ für $y = 0$; aber $v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, d\,y$ wegen Gl. (2).

Wenn man nun an einen zweiten Schritt denkt, so enthält dessen Ausgangsprofil $u(x_0, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} \cdot \Delta x$ bereits $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$. Die neue Limesbetrachtung führt darauf, daß der fünfte und sechste Differentialquotient wieder gebunden sind und der Erfolg des zweiten Schritts in Wandnähe von dem siebenten Differentialquotienten des Ausgangsprofils bei $y = 0$ abhängt! Nun denke man daran, wie man z. B. bei einer tabellarisch gegebenen Funktion den siebenten Differentialquotienten ermitteln soll, noch dazu an dem einen Ende der Funktionstabelle. Und dann sind erst zwei kurze Schritte geschafft!

Zu allem noch die Bindungen! Man sieht aus Gl. (3) oder (4), daß eine Verletzung der Bindungen zu singulärem Verhalten der Lösung an den Punkt $x = x_0$, $y = 0$ führt.

Es erheben sich zwei Fragen:

1. Wie ist das bösartige Verhalten des Gleichungssystems (1), (2) in der Nachbarschaft von Orten mit $u = 0$ zu verstehen?

2. Welcher Art sind die Singularitäten, die bei einem regulären, aber die „Bindungen" verletzenden Ausgangsprofil eintreten?

3. Verhalten der Lösung an Orten mit $u \gtrless 0$. Zu dieser Angelegenheit ist zunächst zu sagen, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen den biharmonischen Gleichungen ($\Delta\Delta F = 0$) nahestehen und deshalb die Lösungen im Inneren des Gebiets immer analytisch sind. Die Einführung der Grenzschicht-Vernachlässigungen stellt jedoch einen den Charakter ändernden Eingriff dar. Der Bau von Gl. (3) zeigt schon, daß nun Charakteristiken vorhanden sind (nämlich die Geraden parallel zur y-Achse), längs deren Unstetigkeiten auftreten, wenn $f(x)$ oder $\varphi(x)$ Unstetigkeiten haben. Dies weist also auf parabolischen Charakter hin. Durch eine Berührungstransformation, mittels deren die Stromfunktion Ψ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird[5]), wird die Sachlage noch klarer. Setzt man $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, so wird damit Gl. (2) identisch erfüllt. Führt man in Gl. (1) statt x, y neue Koordinaten ξ, η ein und setzt $\xi = x$, $\eta = \Psi$, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \Psi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + u \frac{\partial u}{\partial \Psi}.$$

Damit wird aus Gl. (1)

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varrho} \frac{d p}{d \xi} = \nu u \frac{\partial}{\partial \Psi}\left(u \frac{\partial u}{\partial \Psi}\right).$$

Führt man hierin den „Gesamtdruck" $g = p + \frac{\varrho u^2}{2}$ ein (unter Vernachlässigung des dagegen verschwindenden Betrags $\frac{\varrho v^2}{2}$), so wird, wenn jetzt für ξ wieder x geschrieben wird, und außerdem $\nu \varrho = \mu$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \mu u \frac{\partial^2 g}{\partial \Psi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

worin noch $u = \sqrt{2(g - p(x))/\varrho}$ gesetzt werden kann. Gl. (5) ist nun eine Differentialgleichung, die derjenigen der Wärmeleitung eng verwandt ist (Ψ an Stelle der Stablänge und x an Stelle der Zeit), und also vom parabolischen Typ, von dem bekannt ist, daß bei ihm eine gutartige Richtung mit analytischem Abklingen der Temperaturunterschiede usw. (wachsende Zeiten) existiert, daneben aber auch eine bösartige Richtung mit Auftreten von Singularitäten (Extrapolation auf Zustände, die zeitlich vor der gegebenen Anfangsverteilung liegen[6])). Bei der Gl. (5) ist analog zum Wärmeleitungsproblem die Entwicklung nach wachsenden Werten von x gutartig, solange u positiv ist. Wo u aber, wie hinter der Ablösungsstelle, gebiet-

[5]) Im Frühjahr 1914 habe ich mich mit der Strömung durch enge schlanke Kanäle beschäftigt und fand bei der Anwendung der gewöhnlichen Grenzschichtgleichungen eine Schwierigkeit in der Formulierung der Grenzbedingungen $u = v = 0$ am zweiten Rand. Ich versuchte deshalb die Einführung der Stromfunktion als unabhängiger Veränderlicher, da die beiden Ränder jetzt einfach $\Psi = 0$ und $\Psi = Q = \text{const}$ lauten. Die Gl. (5) wurde später aufs neue von Herrn v. Mises gefunden und auf der Kissinger Versammlung der Gesellsch. für angew. Math. u. Mech., Herbst 1927 vorgetragen, siehe diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 428. Da ich meine Rechnung bis dahin nicht veröffentlicht hatte, gebührt Herrn v. Mises die „Priorität" im üblichen Sinn. Vgl. übrigens meine Bemerkung zu der v. Misesschen Veröffentlichung in dieser Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 249 u. f., speziell Abschn. 2. S. 250.

[6]) „Wie müßte die Verteilung vor einer Minute (oder Stunde) ausgesehen haben, damit die augenblickliche ungleichförmige Temperaturverteilung daraus entsteht" (offenbar häufig eine unlösbare Aufgabe!).

weise negativ ist, beginnt der „bösartige" Zustand. Das heißt physikalisch nichts anderes, als daß die wandnahen Flüssigkeitsteile hinter der Ablösungsstelle in der Richtung von größeren zu kleineren x strömen, und somit ihre Geschwindigkeitsverteilung von den Vorgängen abhängt, die sich bei diesen größeren x-Werten abspielen. Sie aus den Zuständen bei kleineren x bestimmen zu wollen, kommt also im günstigsten Fall auf eine Art Rätselraten hinaus. Mit anderen Worten: Die richtige, den Beobachtungen entsprechende Weiterentwicklung der Strömung hinter dem „Ablösungspunkt" kommt nur dann aus der Rechnung heraus, wenn in diesem Bereich der Druckverlauf, d. h. unsere Funktion $f(x)$ nicht irgendwie willkürlich gewählt, sondern sorgfältig dem gewollten Vorgang angepaßt wird.

Was nun das Verhalten der Grenzschicht an der Wand selbst im „normalen Bereich" ($u > 0$ für $y > 0$) betrifft, so ist darauf hinzuweisen, daß die analytische Fortsetzung von u in das Gebiet der negativen y auf negative Werte von u führt, wenn, wie vorausgesetzt, $\frac{\partial u}{\partial y}$ bei $y = 0$ positiv ist. Die Neigung der Lösung zu Absonderlichkeiten längs der Wand erklärt sich also dadurch, daß die analytische Fortsetzung durch die Wand hindurch in ein „bösartiges Gebiet" führt! Soweit Potenzreihen nach y für einzelne Lösungen vorliegen, läßt sich die Extrapolation durchführen. Sie zeigt im Gebiet der negativen y immer ein starkes Anwachsen der Funktionswerte, etwa wie $y \cdot e^{a\,y^2}$ oder ähnliche Funktionen.

4. Lösung bei Verletzung der „Bindungen". Die Untersuchung der zweiten am Ende von Abschnitt 2 gestellten Aufgabe habe ich lange Zeit vergeblich als Doktorarbeit ausgeboten. Es hat sich dann Dr. S. Goldstein aus Cambridge (England), als er 1929 als wissenschaftlicher Gast an meinem Institut weilte, dieser Frage angenommen und sie sehr weitgehend untersucht. Die Singularitäten, die durch ein die „Bindungen" verletzendes Anfangsprofil entstehen, sind algebraischer Natur. Es zeigt sich, daß jedes in eine Potenzreihe nach y entwickelbare Anfangsprofil für ein als ganze Funktion von $x - x_0$ gegebenes $\frac{d\,p}{d\,x}$ eine Lösung liefert, die als Potenzreihe nach $\sqrt[3]{x - x_0}$ erscheint. Die Beiwerte der Potenzen sind dabei Funktionen von $y/\sqrt[3]{x - x_0}$, die durch Differentialgleichungen dritter Ordnung definiert sind[7]). Für unsere Aufgabe scheint jedoch dieses Lösungssystem noch nicht unmittelbar verwendbar zu sein. Aber auch, wenn es hierfür noch weiter ausgearbeitet werden würde, wäre damit nicht allzuviel gewonnen, denn man hätte hierbei, um zu der n-ten Potenz von $x - x_0$ vorzudringen, $3\,n$ Funktionen herzustellen, und das bedeutet eine mit jeder Potenz von $\sqrt[3]{x - x_0}$ weiter anschwellende Rechenarbeit. Goldstein rechnet mit 3 Gliedern und hat dabei schon sehr umständliche Entwicklungen nötig, um den Anschluß an die vorgegebenen Funktionswerte herzustellen; er kommt damit also nur bis zum linearen Glied; der Schritt $\varDelta x$ müßte also sehr klein bleiben, damit nicht unzulässige Fehler entstehen. Das neue Profil wäre dann wieder als Potenzreihe von y darzustellen, um den nächsten Schritt vorzubereiten. Die ganze Sache wäre also höchst mühsam und kaum lohnend.

Es besteht daher das größte Interesse, doch mit ganzzahligen Potenzen von x vorwärts zu kommen. Die folgende Überlegung läßt die Aussicht auf einen brauchbaren Weg zu diesem Ziel hoffnungsvoll erscheinen. Wenn es sich um die Fortsetzung einer bereits durch ein vorhergehendes Verfahren gewonnenen Lösung für einen durchaus regulären Verlauf des Druckgefälles handelt, so müßten, bei völlig streng durchgeführter Rechnung für den vorangehenden Abschnitt, in dem Endprofil, das als Ausgangsprofil des neuen Abschnitts dienen soll, die sämtlichen Bindungen bereits erfüllt sein. Sie sind es in Wirklichkeit nicht genau, da entweder die Reihenentwicklung nach x nach einem relativ niedrigen Glied abgebrochen worden ist, oder sonst numerische Ungenauigkeiten aufgetreten sind. Es wird sich daher gewöhnlich nur darum handeln, durch ganz leichte Änderungen des vorgelegten Ausgangsprofils die Einhaltung der Bindungs-Bedingungen wiederherzustellen, worauf in ganzen Potenzen von x vorwärtsgeschritten werden kann.

Die Frage, wie sich irgendwelche bei diesem „Zurechtrücken" des Profils gemachten Fehler für die nachfolgenden Schritte auswirken, muß hier noch untersucht werden. Es wird sich dabei meist um solche Abweichungen von der unbekannten genauen Form handeln, die bald positiv, bald negativ sich um die genaue Kurve herumschlängeln. Aus der Theorie der Wärmeleitung ist bekannt, daß solche kurzwelligen Schwankungen in der Temperaturverteilung verhältnismäßig rasch abklingen. Eine besondere Untersuchung ist daher nur für die Nähe des Wertes $u = 0$ nötig. Ich habe deshalb den Fall untersuchen lassen, daß über ein Geschwindigkeitsprofil von der einfachen Form $u = a\,y$ eine kleine Störung ε von oszillierendem

[7]) Einzelheiten mögen in der Goldsteinschen Arbeit „Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics", Proc. Cambr. Philos. Soc. Vol. 26 I, 1930, p. 1 nachgelesen werden.

Verlauf gelagert ist. Setzt man zur Vereinfachung fest, daß ε von der Form $\varepsilon = f(x) \cdot \varphi(y)$ sein soll, dann ergibt sich aus dem System (1), (2) nach Linearisierung, daß $f(x) = e^{-\alpha x}$ gesetzt werden muß. Für $\varphi(y)$ ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$a\,\alpha\,y\,\varphi'(y) + \nu\,\varphi'''(y) = 0,$$

die durch

$$\varphi(y) = A \int_0^y \sqrt{y}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a\,\alpha}{\nu}}\, y^{3/2}\right) d\,y + B \int_0^y \sqrt{y}\, J_{+1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a\,\alpha}{\nu}}\, y^{3/2}\right) d\,y + C$$

gelöst wird[8]). Von diesen Ausdrücken erfüllt aber nur derjenige mit A die Grenzbedingungen $\varphi(y) = 0$ und $\varphi''(y) = 0$, so daß sich die physikalisch in Betracht kommende Lösung auf dieses Glied beschränkt. Die Entwicklung nach Potenzen von y ergibt ein Glied mit y, ein weiteres mit y^4, eines mit y^7 usw., wie es für den Fall $f(x) = 0$ den Bindungen entspricht. Im übrigen oszilliert die Funktion mit einer mit wachsendem y abnehmenden Amplitude und abnehmender Wellenlänge[9]). Dieses Verhalten der Lösung in dem untersuchten Spezialfall darf als Beweis dafür angesehen werden, daß bei irgendwelchen kleinen Fehlern von $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ in dem zur Fortsetzung der Lösung herangezogenen Geschwindigkeitsprofil keine den Betrag dieser Fehler übersteigenden Nachwirkungen zu erwarten sein werden, solange $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ positiv ist.

5. Das neue Verfahren. Um nun für das endgültige Verfahren einen klaren Plan zu gewinnen, sei zunächst an Hand einer Entwicklung von u in Potenzen von y durch Eintragen in das System (1), (2) und Koeffizientenvergleich das System der Bindungen noch genauer studiert. Es sei

$$u = a_1\,y + \frac{a_2\,y^2}{2!} + \cdots + \frac{a_k\,y^k}{k!} + \cdots,$$

wo $a_1 \ldots a_k$ Funktionen von x darstellen. Differentiationen nach x seien durch Striche angedeutet (a_1' usw.); $\frac{1}{\varrho}\frac{d\,p}{d\,x}$ sei wieder $= \nu\,f(x)$ gesetzt. Man findet der Reihe nach die folgenden Beziehungen, wenn man jedes a_n mit $n > 1$, wo es auf der rechten Seite auftritt, durch seinen einige Zeilen darüber angegebenen Wert ersetzt:

a_1 (frei), $\qquad a_2 = f$ (gegeben), $\qquad a_3 = 0$ (gegeben),

$a_4 = \frac{1}{\nu}\,a_1\,a_1'$ (frei), $\qquad a_5 = \frac{2}{\nu}\,a_1\,f'$ (gegeben $\times\,a_1$), $\qquad a_6 = \frac{2}{\nu}\,f\,f'$ (gegeben),

$a_7 = \frac{1}{\nu^2}(4\,a_1^2\,a_1'' - a_1\,a_1'^2)$ (frei).

Bricht man die Reihe hier ab, so lassen sich die drei freien Werte a_1, a_4, a_7 aus 3 linearen Gleichungen ermitteln, wenn man von den zu 3 festen Werten von y gehörigen u-Werten ausgeht. Die ersten bis siebenten Potenzen der drei y-Werte werden im voraus berechnet und bei jedem Schritt wieder benützt. Durch Einsetzen von a_1 in a_4 ergibt sich a_1', durch Einsetzen von a_1 und a_1' in a_7 weiter a_1''. Mit diesen Werten läßt sich noch $a_4' = \frac{1}{\nu}(a_1\,a_1'' + a_1'^2)$ berechnen.

Das ganze Verfahren läßt sich noch verfeinern, wenn man nachträglich mit

$$a_8 = \frac{1}{\nu^2}\left[10\,a_1^2\,f'' - 13\,a_1\,a_1'\,f' + 9\,(a_1\,a_1'' + a_1'^2)\,f\right]$$

und

$$a_9 = \frac{1}{\nu^2}\left[40\,a_1\,f\,f'' - 16\,a_1\,f'^2\right]$$

[8]) Diese Lösung verdanke ich meinem Mitarbeiter Dr. H. Görtler. Er hat auch den Nachweis geführt, daß eine die Grenzbedingungen befriedigende Lösung für $f = e^{+\alpha x}$ nicht existiert.

[9]) Aus der asymptotischen Formel für $J_{\pm 1/3}$ ergibt sich eine zu $1/\sqrt{y}$ proportionale Wellenlänge λ und eine Abklingungskonstante $\alpha = \frac{\nu}{a\,y \cdot (\lambda/2\pi)^2}$.

für die drei y-Werte die Glieder achter und neunter Potenz berechnet, und damit aus den gegebenen drei u-Werten a_1, a_4 und a_7 erneut rechnet (gegebenenfalls durch Iteration zu wiederholen). Über die zweckmäßigste Wahl der drei y-Werte wird noch eine besondere Untersuchung anzustellen sein. Vielleicht wird es sich als zweckmäßig erweisen, die Rechnung so anzulegen, daß man zunächst aus einer Ordinate y_1 eine erste Näherung von a_1 ermittelt, dann mittels y_1 und y_2 a_4 und eine Verbesserung von a_1, schließlich mit drei y-Werten a_7, eine Verbesserung von a_4 und eine zweite Verbesserung von a_1. Bei diesem Verfahren kann im zweiten Schritt gleich bis a_6, im dritten Schritt bis a_9 gegangen werden, wobei jedesmal die vorherige Näherung von a_1 bzw. a_4 in die höheren Glieder eingesetzt wird.

Bei den numerischen Rechnungen wird man übrigens meist in bekannter Weise dimensionslose Koordinaten wählen, durch die an Stelle von ν die Einheit tritt ($X = x/l$,

$$Y = y\sqrt{u_0/\nu\, l}, \qquad U = u/u_0).$$

Von diesem Verfahren wird a_7' nicht geliefert, es läßt sich daher ohne Kontakt mit einem anderen Verfahren, das die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils im Inneren der Flüssigkeit liefert, nicht fortsetzen. Hierfür steht aber die in Gl. (4) gegebene Rechenvorschrift zur Verfügung, oder aber diejenige von Gl. (5), die wahrscheinlich hier noch zweckmäßiger ist. Diese ist nur noch durch einen Übergang zwischen y und Ψ zu ergänzen.

Wegen

$$u = \sqrt{\frac{2}{\varrho}(g - p)} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{ist} \qquad y = \Phi(x) + \int_{\psi_1}^{\psi} d\Psi/u.$$

Setzt man hierin

$$g = g(x_0) + \Delta x \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x = x_0} = g(x_0) + \Delta x \cdot \nu \left(u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}\right)_{x = x_0}$$

(gegebenenfalls analog zum Runge-Kuttaschen Verfahren zu verbessern), so ist das zu jedem ψ oder u gehörige y bis auf den unbekannten Wert $\Phi(x_0 + \Delta x)$ bekannt. Dieser bedeutet eine Parallelverschiebung des gefundenen Geschwindigkeitsprofils und kann so ermittelt werden, daß das Profil sich stetig an das nach der anderen Methode ermittelte wandnahe Profil anschließt. Man muß für eine breite Überlappung beider Profile sorgen und gewinnt hierdurch das Hilfsmittel für die Bestimmung des Koeffizienten a_7 für den nächsten Schritt. Umgekehrt ist der Anschluß auch für das Fortschreiten im Innern wichtig, da man bei der numerischen Ermittlung von $\frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}$ am Rande des Gebiets jedesmal etwas an Breite verlieren würde, wenn man den Verlauf von g im Randstreifen nicht hinzunehmen würde.

Man kann natürlich hinterher auch in dem wandnahen Streifen den Schritt von $x_0 + \Delta x$ rückwärts zu x_0 hin nach der früheren Methode vornehmen und aus den Abweichungen eine Korrektur zweiter Ordnung herleiten (gegebenenfalls auch vier Schritte hin und her, um wie beim Runge-Kutta-Verfahren den Fehler des Schrittes auf die fünfte Ordnung herunterzubringen, was natürlich dann die Wahl von größeren Schritten Δx ermöglicht).

Das Verfahren ist auch so wie geschildert nicht gerade einfach, aber es dürfte sehr zuverlässige Ergebnisse liefern. Die praktische Erprobung steht noch aus. Sie soll demnächst im Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung vorgenommen werden. Es ist zu erwarten, daß man bis zur Ablösungsstelle und wohl noch ein wenig darüber hinaus kommen wird. Eine Untersuchung der Verhältnisse an der Ablösungsstelle ($a_1 = 0$) zeigt, daß dort a_1' die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, da a_4 zugleich mit a_1 Null wird. Man wird aber vorwärtskommen, wenn man a_1' und auch a_4', das hier $= a_1'^2/\nu$ wird, bis dorthin extrapoliert. Von der Ablösungsstelle $x = x_A$ wird man wohl mit einer dort beginnenden Entwicklung nach Potenzen von $x - x_A$ und y, deren Beiwerte durch den stetigen Anschluß an das Gebiet $x < x_A$ gegeben sind, noch etwas weiter vordringen können, wobei nunmehr der Verlauf von $f(x)$ nach der Forderung, daß ein Totwassergebiet auftreten soll, zu wählen sein wird.

Zusammenfassung. Die Eigenschaften der Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen zäher Flüssigkeit unter „Grenzschicht-Vernachlässigung" werden erörtert. Es wird eine Methode für die numerische Ermittlung der Lösung angegeben, wenn das Anfangsprofil $u(x_0, y)$ und der Druckverlauf $p(x)$ im Inneren des Gebietes gegeben ist. 807

Über die Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von *W. Tollmien* in Dresden.

Ein sehr beliebtes Verfahren zur praktischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen beruht auf dem Grundsatz fortlaufender Extrapolation. Dieser Gedanke liegt so nahe, daß verschiedene Autoren, oft unabhängig voneinander, Spielarten dieses Verfahrens angegeben haben, die sich nicht im Prinzip, sondern nur in der Anordnung der Rechnung unterscheiden. Gewöhnlich wird das Verfahren nach J. C. Adams benannt, und dieser Sprachgebrauch soll auch hier beibehalten werden. J. C. Adams ist einer der beiden berühmten Astronomen, welche die Existenz des Planeten Neptun vorausberechneten.

Der grundsätzliche Kern des Verfahrens sei kurz an einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung erläutert. Die Integralfunktion $y(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

mit der Anfangsbedingung $y = y_0$ für $x = x_0$ soll bestimmt werden. Die Voraussetzungen über $f(x, y)$ werden später formuliert (vgl. § 1). Für y sei nun bis zum Argument $x = x_n$ eine Näherung $\bar{y}(x)$ bekannt, die den Genauigkeitsansprüchen genüge. Mit dieser Näherung wird die Funktion $f(x, \bar{y}(x))$ gebildet, die nur von x allein abhängt. Man nimmt $f(x, \bar{y}(x))$ als Näherung für die Funktion $f(x, y(x))$, die nach der Differentialgleichung gleich der ersten Ableitung der Integralfunktion $y(x)$ ist. $f(x, \bar{y}(x))$ ist allerdings zunächst nur bis zum Argument x_n bekannt, aber man kann diese Funktion bis zum nächsten Argument x_{n+1}, für das y angenähert bestimmt werden soll, extrapolieren. Nachdem man sich so eine Näherung für die erste Ableitung der Integralfunktion bis zum Argument x_{n+1} verschafft hat, ermittelt man durch Quadratur einen Näherungswert für $y(x_{n+1})$. Dies Verfahren wird sodann über x_{n+1} hinaus in der gleichen Weise fortgesetzt.

Die verschiedenen Durchführungen dieses einfachen Grundgedankens unterscheiden sich zunächst in der Art der Extrapolation von $f(x, \bar{y}(x))$. Adams[1]) bedient sich dabei der Differenzentechnik, er schließt sich also der Newtonschen Form des Approximationspolynoms an, während etwa Steffensen[2]) unmittelbar die Werte $f(x, \bar{y}(x))$ benutzt, entsprechend der Lagrangeschen Art der Annäherung der Funktion durch ein Polynom. Innerhalb dieser beiden Klassen von Extrapolationsformeln sind noch mancherlei Varianten möglich. Auf den Vorschlag von Nyström[3]) sei hingewiesen. Eine gute Literaturübersicht ist in einem amerikanischen Bericht[4]) zu finden.

Bei dieser Integration durch fortgesetzte Extrapolation ist eine starke Fehlerfortpflanzung zu befürchten, wenn man das Verfahren für eine größere Anzahl von Argumentschritten hintereinander ausführt. Um die Fehlerfortpflanzung hintanzuhalten, ist oft eine iterative Verbesserung der Näherungswerte der Integralfunktion bei jedem Einzelschritt (nach der Beschreibung oben vom Argument x_n zum Argument x_{n+1}) empfohlen worden. Diese Näherungsfolge muß erst eine „endgültige Näherung" $\bar{y}$ erreichen, ehe zum nächsten Argumentschritt (nach der Beschreibung von x_{n+1} zu x_{n+2}) übergegangen wird. Dabei wird die Näherungsfolge durch eine sinngemäße Übertragung des bekannten Iterationsprozesses von Picard gewonnen, wie in § 2 des näheren ausgeführt werden wird.

Das Adamssche Verfahren und seine Abarten kann offensichtlich erst dann in Gang gesetzt werden, wenn bereits Näherungswerte $\bar{y}$ für eine Anzahl Argumente x_i bekannt sind. Diese Ausgangswerte kann man sich entweder durch fremde Methoden beschaffen, z. B. durch Ansatz einer Taylorentwicklung für $y(x)$, oder am besten wieder durch Näherungsfolgen, die durch iterative Verbesserung irgendwelcher roher Näherungen zu den endgültigen Ausgangswerten $\bar{y}(x)$ führen. In § 2 wird hierfür eine mögliche Rechnungsanordnung gegeben.

Natürlich kann man alle diese Prozesse auch graphisch ausführen. Die Extrapolation von $f(x, \bar{y}(x))$ mittels eines Polynoms erfolgt dann graphisch mittels einer höheren Parabel; besser noch kann man bei leidlicher Schulung nach dem Augenmaß extrapolieren. Das weitere Vorgehen bei der iterativen Verbesserung ist wohlbekannt, so daß sich ein besonderes Eingehen auf die graphischen Methoden im vorliegenden Zusammenhang erübrigt.

---

[1]) Vgl. die Beschreibung des Adamsschen Verfahrens bei E. T. Whittaker and J. Robinson: The Calculus of Observations, London 1924, Chapter XIV.

[2]) J. F. Steffensen: Interpolation, Baltimore 1927 (Dänische Ausgabe Kopenhagen 1925), § 17.

[3]) E. J. Nyström: Über die numerische Integration von Differentialgleichungen, Acta Societatis Scientiarum Fennicae **50**, Nr. 13 (1925).

[4]) A. A. Bennett, W. E. Milne, H. Bateman: Numerical Integration of Differential Equations, Bull. Nat. Research Council Nr. 92, Washington 1933.

Trotz der Einfachheit des Grundgedankens machte die Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren besondere Schwierigkeiten, jedenfalls ließ sie lange auf sich warten. Fast alle Autoren blieben bei Betrachtungen über den Fehler beim Einzelschritt stehen, berücksichtigten aber nicht, jedenfalls nicht explizit, die Fehlerfortpflanzung, wenn eine Anzahl von Argumentschritten hintereinander ausgeführt werden. Erst in einer Arbeit von R. v. Mises[5]) wurde dieser wichtige Umstand voll in Betracht gezogen und eine explizite Fehlerabschätzung gegeben. Günther Schulz[6]) lieferte dann im Anschluß an diese Arbeit eine Fehlerabschätzung für das Adamssche Verfahren mit iterativer Verbesserung, wie wir es oben skizzierten.

Die Auswirkung dieses Erfolges der Theorie wurde dadurch behindert, daß die beiden Fehlerabschätzungen auf langwierigem und recht verwickeltem Wege gewonnen wurden. Aus dem Bedürfnis nach einem einfachen Beweisgang ist im folgenden eine neue Fehlerabschätzung gegeben. Die Einfachheit der Herleitung wurde dadurch erzielt, daß ein grundlegender Satz aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen herangezogen wurde. Dieser Satz ist ohnehin für die Praxis der Differentialgleichungen unentbehrlich und ist daher als ein angemessenes Hilfsmittel anzusehen.

Daß diese Zeilen E. Trefftz zum Gedächtnis geschrieben wurden, möge seine Begründung in dem großen Interesse finden, das E. Trefftz den Fragen der praktischen Integration der Differentialgleichungen mit Fehlerabschätzungen immer entgegengebracht hat.

Um eine feste Vorstellung zu haben, geben wir die Fehlerabschätzung für eine ganz bestimmte Form des Adamsschen Verfahrens mit iterativer Verbesserung. Der zugrunde gelegte Rechnungsgang ist auch in der Formelsammlung von Günther Schulz[7]) angegeben und wird deshalb nur kurz erläutert werden (vgl. § 2). Die Fehlerabschätzung läßt sich auf andere Spielarten des Verfahrens ohne Mühe übertragen. An die Spitze der Erörterung stellen wir die erwähnte allgemeine Abschätzungsformel aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 1. Allgemeine Abschätzungsformeln für angenäherte Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung $y = y_0$ bei $x = x_0$ soll bestimmt werden. $f(x, y)$ soll dabei in den Bereich von x und y, der im folgenden in Betracht kommt, in beiden Variablen x und y stetig sein, außerdem der Lipschitzbedingung

$$|f(x, y_{\mathrm{I}}) - f(x, y_{\mathrm{II}})| \leq M\,|y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{II}}| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

genügen; mit anderen Worten, der Differenzenquotient von f bezüglich y soll seinem Betrag nach M nicht übersteigen. Ohne praktische Bedenken kann man die Lipschitzbedingung durch die stärkere Forderung ersetzen, daß f eine stetige partielle Ableitung nach y hat, so daß

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ist. Der kürzeren Schreibweise wegen wollen wir meist diese Bedingung ansetzen. Tatsächlich käme man im folgenden mit der milderen Lipschitzbedingung überall durch.

Unter diesen Bedingungen für f läßt sich nach Picard die eindeutige Existenz des gesuchten Integrals beweisen[8]). Der Picardsche Iterationsprozeß, den man zur theoretischen Konstruktion des Integrals in diesem Existenzbeweis benutzt, ist durch

$$y^{(\nu+1)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(\nu)})\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

beschrieben, wo der hochgestellte und eingeklammerte Index die Nummer der Näherung bezeichnet.

Aus dem Picardschen Existenzbeweis entspringt nebenbei eine grundlegende Abschätzungsformel, wie schon häufig dargetan ist[9]). Der Unterschied zwischen einer Näherung $\bar{y}(x)$ und dem exakten Integral $y(x)$ soll abgeschätzt werden, wenn der Rest bekannt ist,

[5]) R. v. Mises: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen, diese Zeitschr. Bd. X, S. 81, 1930.

[6]) Günther Schulz: Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, diese Zeitschr. Bd. XII, S. 44, 1932.

[7]) Günther Schulz: Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Berlin und Leipzig 1937, Abschnitt VII, § 3.

[8]) Vgl. etwa J. Horn: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin und Leipzig, 3. Aufl. 1937, § 11.

[9]) Vgl. etwa J. Horn (a. a. O.) § 11. Formel (11) oder E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, § 11, Abschnitt 51 und 52. Eine etwas gröbere Abschätzung findet sich in L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, II. Kapitel, § 3.

bis auf den $\bar{y}(x)$ die Differentialgleichung erfüllt. Es sei $\bar{y}(x_0) = y_0$, und $\bar{y}$ sei stetig und habe eine stückweise stetige Ableitung. Bilden wir $\frac{d\bar{y}}{dx}$ und $f(x, \bar{y}(x))'$, so ist der erwähnte Rest $\vartheta(x)$ definiert durch

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = f(x, \bar{y}(x)) + \vartheta(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Ist nun

$$|\vartheta| \leq \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

so gilt die fundamentale Ungleichung

$$|\bar{y} - y| \leq \frac{\varepsilon}{M}(e^{M|x - x_0|} - 1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

In dieser Ungleichung ist ε allein mit Hilfe von $\bar{y}$ zu bestimmen. M als obere absolute Schranke von $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist für einen genügend breiten Streifen um die Näherungskurve $\bar{y}(x)$ zu ermitteln, so daß y mit in dem Streifen enthalten ist. Nach durchgeführter Abschätzung von $|\bar{y} - y|$ kann man leicht kontrollieren, ob man das Gebiet zur Bestimmung von M groß genug gewählt hat.

Diese Formel läßt sich mit geringer Mühe auf den wichtigen Fall verallgemeinern, daß $\bar{y}(x)$ eine etwas andere Anfangsbedingung erfüllt als das exakte Integral y. Es sei jetzt

$$\bar{y}(x_0) = y_0 + d \quad \text{mit} \quad |d| \leq \delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

während wie früher

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = f(x, \bar{y}(x)) + \vartheta(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und

$$|\vartheta| \leq \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

sei. Wir führen sodann

$$\bar{\eta}(x) = \bar{y}(x) - d$$

ein, so daß

$$\frac{d\bar{\eta}}{dx} = f(x, \bar{\eta}(x) + d) + \vartheta(x)$$

mit der früheren Anfangsbedingung $\bar{\eta}(x_0) = y_0$ gilt. Schreiben wir dafür

$$\frac{d\bar{\eta}}{dx} = f(x, \bar{\eta}(x)) + \vartheta_1(x) + \vartheta(x),$$

wobei unter Benutzung der Lipschitzbedingung

$$|\vartheta_1(x)| = |f(x, \bar{\eta}(x) + d) - f(x, \bar{\eta}(x))| \leq M|d| \leq M\delta$$

ist, so können wir die frühere Abschätzungsformel (7) auf $\bar{\eta}$ anwenden:

$$|\bar{\eta} - y| \leq \frac{M\delta + \varepsilon}{M}(e^{M|x - x_0|} - 1).$$

Für $\bar{\eta}$ führen wir wieder $\bar{y} - d$ ein. Dann erhält[10]) man

$$|\bar{y} - y| \leq \delta\, e^{M|x - x_0|} + \frac{\varepsilon}{M}(e^{M|x - x_0|} - 1) \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Aus dem Gang des Picardschen Existenzbeweises ergibt sich eine einfache Möglichkeit zur Verschärfung dieser Abschätzungsformeln. An Stelle von (6) kann man die folgende Definition von ε benutzen:

$$\left|\int_{x_0}^{x} \vartheta(x)\,dx\right| \leq \varepsilon\,|x - x_0| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6a).$$

Diese Möglichkeit, die Abschätzungen zu verfeinern, soll jedoch in dieser Arbeit nur in einer Bemerkung ganz am Schluß ausgenutzt werden.

§ 2. Adamssche Integrationsmethode mit iterativer Verbesserung. Die gesuchte Näherung $\bar{y}$ sei wie in der Einleitung zunächst bis zum Argument x_n als bekannt vorausgesetzt. Je zwei aufeinanderfolgende Argumente $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ mögen den festen Abstand h voneinander haben. h kann positiv oder negativ sein. Zuerst ist die Funktion $f(x, \bar{y}(x))$ über x_n hinaus bis zum Werte $x_{n+1} = x_n + h$ zu extrapolieren. Zur Abkürzung setzen wir

$$\bar{y}(x_i) = \bar{y}_i, \qquad f(x_i, \bar{y}(x_i)) = F(x_i) = F_i \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

[10]) Aus $|(\bar{y} - y) - d| \leq k > 0$ folgt $|\bar{y} - y| \leq k + |d|$.

Die Extrapolation erfolge nach der Newtonschen Formel mit aufsteigenden Differenzen. Wenn wir uns mit einem Approximationspolynom dritten Grades begnügen, erhalten wir

$$F(x) \approx F_n + \frac{x - x_n}{h} \nabla_n F + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{2!\,h^2} \nabla_n^2 F + \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{3!\,h^3} \nabla_n^3 F \quad (13).$$

Die aufsteigenden oder rückwärts genommenen Differenzen sind dabei

$$\nabla_n F = F_n - F_{n-1}, \quad \nabla_n^2 F = F_n - 2F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \nabla_n^3 F = F_n - 3F_{n-1} + 3F_{n-2} - F_{n-3} \quad (14).$$

Das Approximationspolynom (13) stimmt mit F für die Argumente $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$ überein. Nun wird durch Quadratur von (13) von x_n bis x_{n+1}, also über ein extrapoliertes Funktionsstück:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x)\,dx \approx h\left\{F_n + \frac{1}{2}\nabla_n F + \frac{5}{12}\nabla_n^2 F + \frac{3}{8}\nabla_n^3 F\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (15).$$

Da F eine Näherung für die Ableitung von y nach x ist, hat man daraus als ersten Näherungswert $y_{n+1}^{(1)}$ für $y(x_{n+1})$:

$$y_{n+1}^{(1)} = \tilde{y}_n + h\left\{F_n + \frac{1}{2}\nabla_n F + \frac{5}{12}\nabla_n^2 F + \frac{3}{8}\nabla_n^3 F\right\} \quad \ldots\ldots (16).$$

Nach dem ursprünglichen Adamsschen Verfahren wird dieser Näherungswert schon als endgültig angenommen.

Wir wollen iterativ verbessern, indem mit $y_{n+1}^{(1)}$ auch für $F(x_{n+1})$ ein erster verbesserter Näherungswert $F_{n+1}^{(1)} = f(x, y_{n+1}^{(1)})$ gebildet wird. Damit können wir nunmehr durch Interpolation für den Verlauf der ersten Näherung $F^{(1)}$ in dem Intervall $x_n \ldots x_{n+1}$ die Aussage machen:

$$\left.\begin{aligned} F^{(1)}(x) = F_{n+1}^{(1)} &+ \frac{x - x_{n+1}}{h}\nabla_{n+1} F^{(1)} + \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)}{2!\,h^2}\nabla_{n+1}^2 F^{(1)} \\ &+ \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{3!\,h^3}\nabla_{n+1}^3 F^{(1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17).$$

Durch Integration dieser Formel von x_n bis x_{n+1} erhalten wir in Analogie zum Picardschen Iterationsprozeß als nächste Näherung $y_{n+1}^{(2)}$ für $y(x_{n+1})$:

$$y_{n+1}^{(2)} = \tilde{y}_n + h\left\{F_{n+1}^{(1)} - \frac{1}{2}\nabla_{n+1} F^{(1)} - \frac{1}{12}\nabla_{n+1}^2 F^{(1)} - \frac{1}{24}\nabla_{n+1}^3 F^{(1)}\right\} \quad \ldots (18).$$

Mit diesem Näherungswert $y_{n+1}^{(2)}$ wird ein zweiter Näherungswert $F_{n+1}^{(2)} = f(x, y_{n+1}^{(2)})$ gebildet usf. Allgemein berechnet sich die $\nu + 1$-te Näherung aus der ν-ten nach der Formel:

$$y_{n+1}^{(\nu+1)} = \tilde{y}_n + h\left\{F_{n+1}^{(\nu)} - \frac{1}{2}\nabla_{n+1} F^{(\nu)} - \frac{1}{12}\nabla_{n+1}^2 F^{(\nu)} - \frac{1}{24}\nabla_{n+1}^3 F^{(\nu)}\right\} \quad \ldots (19).$$

Die Konvergenz dieser Näherungen $y_{n+1}^{(\nu)}$ mit wachsendem ν nach einer endgültigen Näherung $\tilde{y}_{n+1}$ wird im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

Es bleibt nur noch übrig, Näherungswerte $\tilde{y}$ für einige Argumente am Anfang der Integralkurve zu ermitteln. Da wir uns mit Approximationspolynomen dritten Grades begnügt haben, genügt es, $\tilde{y}$ für x_0, x_1, x_2, x_3 zu kennen, um dann das obige Verfahren in Gang zu setzen. Dabei ist $\tilde{y}(x_0) = y_0$ von vornherein gegeben. Die ersten Näherungswerte für y_1, y_2, y_3 kann man etwa nach den Formeln

$$y_1^{(1)} = y_0 + h\,f(x_0, y_0), \qquad y_2^{(1)} = y_1^{(1)} + h\,f(x_1, y_1^{(1)}), \qquad y_3^{(1)} = y_2^{(1)} + h\,f(x_2, y_2^{(1)}) \quad (20)$$

gewinnen, indem man die Integralkurve durch ein Polygon nach dem Vorgange von Euler und Cauchy approximiert. Etwas rascher kommt man zum Ziele, wenn man extrapolatorische Quadratur nach Art der Formel (16) benutzt:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_0 + h\,F_0^{(1)}, \qquad y_2^{(1)} = y_1^{(1)} + h\left\{F_1^{(1)} + \frac{1}{2}\nabla_1 F^{(1)}\right\} \\ y_3^{(1)} &= y_2^{(1)} + h\left\{F_2^{(1)} + \frac{1}{2}\nabla_2 F^{(1)} + \frac{5}{12}\nabla_2^2 F^{(1)}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21).$$

Dabei ist $F_0^{(1)} = f(x_0, y_0)$, $F_1^{(1)} = f(x_1, y_1^{(1)})$ usw., so daß sich das Abbrechen der rechten Seiten dieser Formeln zwangsläufig ergibt.

Hat man eine ν-te Näherung $y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, y_3^{(\nu)}$, so kann man das Approximationspolynom dritten Grades durch $F_i^{(\nu)} = F(x_i, y_i^{(\nu)})$ mit $i = 0, 1, 2, 3$ legen:

$$F_3^{(\nu)} + \frac{x - x_3}{h} \nabla_3 F^{(\nu)} + \frac{(x - x_3)(x - x_2)}{2!\, h^2} \nabla_3^2 F^{(\nu)} + \frac{(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)}{3!\, h^3} \nabla_3^3 F^{(\nu)}.$$

Durch Integration dieses Polynoms von x_0 bis x_1, von x_1 bis x_2, von x_2 bis x_3 erhält man die $\nu + 1$-te Näherung für y_1, y_2 und y_3:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(\nu+1)} - y_0 &= h \left\{ F_3^{(\nu)} - \frac{5}{2} \nabla_3 F^{(\nu)} + \frac{23}{12} \nabla_3^2 F^{(\nu)} - \frac{3}{8} \nabla_3^3 F^{(\nu)} \right\} \\ y_2^{(\nu+1)} - y_1^{(\nu+1)} &= h \left\{ F_3^{(\nu)} - \frac{3}{2} \nabla_3 F^{(\nu)} + \frac{5}{12} \nabla_3^2 F^{(\nu)} + \frac{1}{24} \nabla_3^3 F^{(\nu)} \right\} \\ y_3^{(\nu+1)} - y_2^{(\nu+1)} &= h \left\{ F_3^{(\nu)} - \frac{1}{2} \nabla_3 F^{(\nu)} - \frac{1}{12} \nabla_3^2 F^{(\nu)} - \frac{1}{24} \nabla_3^3 F^{(\nu)} \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (22).$$

Damit ist das Rechenverfahren vollständig dargelegt.

§ 3. Existenz einer endgültigen Näherung. Die Existenz der endgültigen Näherung $\tilde{y}$ wird durch Aufzeigung hinreichender Bedingungen für die Konvergenz der Näherungsfolgen des Verfahrens bewiesen. Diese hinreichenden Bedingungen lassen sich durch passende Wahl des Argumentschrittes h erfüllen. Die genaue Konvergenzgrenze, mit anderen Worten, die Aufstellung von Bedingungen, die nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig sind, ist praktisch kaum wichtig.

Abgesehen vom Beginn werden die Näherungsfolgen für $\tilde{y}$ nach (19) berechnet. Drückt man die Differenzen nach (14) durch die Funktionswerte selbst aus, so kann man für (19) auch schreiben:

$$y_{n+1}^{(\nu+1)} = \tilde{y}_n + \frac{h}{24} \left\{ 9\, F_{n+1}^{(\nu)} + 19\, F_n - 5\, F_{n-1} + F_{n-2} \right\}$$

oder ausführlich:

$$y_{n+1}^{(\nu+1)} = \tilde{y}_n + \frac{h}{24} \left\{ 9\, f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(\nu)}\right) + 19\, f(x_n, \tilde{y}_n) - 5\, f(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) + f(x_{n-2}, \tilde{y}_{n-2}) \right\} \quad . \quad (23).$$

Diese Vorschrift stellt aber nichts anderes dar als die bekannte iterative Lösungsmethode einer transzendenten Gleichung[11]), und zwar handelt es sich hier um die Bestimmung von $\tilde{y}_{n+1}$ aus der Gleichung:

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{h}{24} \left\{ 9\, f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) + 19\, f(x_n, \tilde{y}_n) - 5\, f(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) + f(x_{n-2}, \tilde{y}_{n-2}) \right\} \quad (24).$$

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Auflösung der Gleichung

$$\tilde{y}_{n+1} = \varphi(\tilde{y}_{n+1}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

durch Iteration ist

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{y}_{n+1}} \right| < 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

In diesem Falle ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{y}_{n+1}} = \frac{9}{24} h \frac{\partial f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})}{\partial \tilde{y}_{n+1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27),$$

woraus unter Benutzung von (3) die Konvergenzbedingung

$$\frac{3}{8} |h| M < 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

folgt. Diese Konvergenzbedingung findet sich schon in der Arbeit von Günther Schulz (a. a. O. § 2), ohne Bezugnahme auf den allgemeinen Satz direkt abgeleitet.

Es bleibt nur noch übrig, die Konvergenz der Näherungsfolgen für die Ausgangswerte $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$ zu beweisen. Nach ähnlichen Umformungen wie oben erhalten wir die Iterationsvorschrift (22) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(\nu+1)} - y_0 &= \frac{h}{24} \{ f(x_3, y_3^{(\nu)}) - 5\, f(x_2, y_2^{(\nu)}) + 19\, f(x_1, y_1^{(\nu)}) + 9\, f(x_0, y_0) \} \\ y_2^{(\nu+1)} - y_1^{(\nu+1)} &= \frac{h}{24} \{ - f(x_3, y_3^{(\nu)}) + 13\, f(x_2, y_2^{(\nu)}) + 13\, f(x_1, y_1^{(\nu)}) - f(x_0, y_0) \} \\ y_3^{(\nu+1)} - y_2^{(\nu+1)} &= \frac{h}{24} \{ 9\, f(x_3, y_3^{(\nu)}) + 19\, f(x_2, y_2^{(\nu)}) - 5\, f(x_1, y_1^{(\nu)}) + f(x_0, y_0) \} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (29).$$

[11]) Vgl. Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, Berlin und Leipzig 1928, § 18, 5 (Lösung einer transzendenten Gleichung), § 18, 7 (Lösung eines Systems transzendenter Gleichungen).

Diese Iterationsvorschrift fassen wir auf als Vorschlag zur Lösung eines Systems von drei transzendenten Gleichungen für die Größen

$$v_1 = \bar{y}_1 - y_0, \qquad v_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1, \qquad v_3 = \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

Durch diese Auffassung wird es möglich, einen allgemeinen bekannten Konvergenzsatz anzuwenden. Wir schreiben die drei transzendenten Gleichungen symbolisch als:

$$v_1 = \varphi_1(v_1, v_2, v_3), \qquad v_2 = \varphi_2(v_1, v_2, v_3), \qquad v_3 = \varphi_3(v_1, v_2, v_3) \quad \ldots \quad (31).$$

Dabei ist etwa

$$\varphi_1(v_1, v_2, v_3) = \frac{h}{24}\{f(x_3, \bar{y}_3) - 5f(x_2, \bar{y}_2) + 19f(x_1, \bar{y}_1) + 9f(x_0, y_0)\} \quad \ldots \quad (32),$$

wo $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ nach (30) durch v_1, v_2 und v_3 auszudrücken sind. Für die Möglichkeit der iterativen Lösung dieses Gleichungssystems ist es hinreichend (vgl. Willers a. a. O.), daß

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial v_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_3}{\partial v_1}\right| < 1, \quad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_2}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial v_2}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_3}{\partial v_2}\right| < 1, \quad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_3}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial v_3}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_3}{\partial v_3}\right| < 1 \quad . \quad (33)$$

sind. Diese Ableitungen kann man leicht bilden, wenn man sich erinnert, daß nach (30)

$$\bar{y}_1 = y_0 + v_1, \qquad \bar{y}_2 = y_0 + v_1 + v_2, \qquad \bar{y}_3 = y_0 + v_1 + v_2 + v_3$$

ist. Dann wird z. B.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} = \frac{h}{24}\left\{\frac{\partial f(x_3, \bar{y}_3)}{\partial \bar{y}_3} - 5\frac{\partial f(x_2, \bar{y}_2)}{\partial \bar{y}_2} + 19\frac{\partial f(x_1, \bar{y}_1)}{\partial \bar{y}_1}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Mit Benutzung der Bedingung (3) erhält man die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1}\right| \leqq \frac{25}{24}|h|\,M \quad \ldots \ldots \quad (35).$$

In dieser Weise bekommt man aus (33) als hinreichende Konvergenzbedingungen

$$\frac{85}{24}|h|\,M < 1, \qquad 2\,|h|\,M < 1, \qquad \frac{11}{24}|h|\,M < 1 \quad \ldots \ldots \quad (36).$$

Die Konvergenz der Näherungsfolgen für die Ausgangswerte $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ ist also gesichert, wenn

$$\frac{85}{24}|h|\,M < 1 \quad \ldots \ldots \quad (37),$$

während für die Konvergenz der Näherungsfolgen im weiteren Verlauf nach (28) schon

$$\frac{3}{8}|h|\,M < 1 \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

hinreicht. Diesen Bedingungen entsprechend ist h zu wählen. Praktisch wird man h so bestimmen, daß man bei den Ausgangswerten mit drei- bis vierfacher Iteration auskommt, während im weiteren Verlauf ein- bis zweimalige Anwendung der Formel (19) zur Erzielung der gewünschten Genauigkeit genügen sollte. Die Rechenarbeit erledigt sich rascher, als man nach der Beschreibung erwarten sollte.

Damit ist die Existenz der endgültigen Näherung $\bar{y}(x)$ bewiesen. Diese Näherung wird also gewonnen durch iterative Berechnung von $\bar{y}_{n+1}$ für $n \geqq 3$ aus der Gleichung

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \frac{h}{24}\{9f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + 19f(x_n, \bar{y}_n) - 5f(x_{n-1}, \bar{y}_{n-1}) + f(x_{n-2}, \bar{y}_{n-2})\} \quad . \quad . \quad (38)$$

und durch iterative Berechnung von $\bar{y}_1 - y_0$, $\bar{y}_2 - \bar{y}_1$ und $\bar{y}_3 - \bar{y}_2$ aus

$$\left.\begin{aligned}
\bar{y}_1 - y_0 &= \frac{h}{24}\{f(x_3, \bar{y}_3) - 5f(x_2, \bar{y}_2) + 19f(x_1, \bar{y}_1) + 9f(x_0, y_0)\} \\
\bar{y}_2 - \bar{y}_1 &= \frac{h}{24}\{-f(x_3, \bar{y}_3) + 13f(x_2, \bar{y}_2) + 13f(x_1, \bar{y}_1) - f(x_0, y_0)\} \\
\bar{y}_3 - \bar{y}_2 &= \frac{h}{24}\{9f(x_3, \bar{y}_3) + 19f(x_2, \bar{y}_2) - 5f(x_1, \bar{y}_1) + f(x_0, y_0)\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (39).$$

Die Formeln (38) und (39) definieren vollständig das dargestellte Integrationsverfahren.

§ 4. Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren mit iterativer Verbesserung. Nach diesen Vorbereitungen erledigt sich die Fehlerabschätzung leicht. Wir haben zunächst festzustellen, welcher Differentialgleichung die endgültige Näherung $\bar{y}(x)$ genügt.

$\tilde{y}$ wird immer nur für die ausgezeichneten Argumente $x_i = x_0 + i\,h$ mit $i = 1, 2 \ldots$ betrachtet, ebenso natürlich auch die Funktion $f(x, \tilde{y}(x))$. Um die transzendente Gl. (38) aufzustellen, sind die Funktionswerte

$$f(x_i, \tilde{y}(x_i)) = F(x_i)$$

durch ein Interpolationspolynom 3. Grades für die Zwischenwerte der Argumente x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} ergänzt zu denken. Durch Quadratur dieses Interpolationspolynoms von x_n bis x_{n+1} folgt dann die Gl. (38). Entsprechend werden die transzendenten Gl. (39) für die Ausgangswerte mittels Quadratur des Interpolationspolynoms durch die Funktionswerte $F(x_0)$, $F(x_1)$, $F(x_2)$ und $F(x_3)$ gewonnen, wobei von x_0 bis x_1, von x_1 bis x_2 und von x_2 bis x_3 zu integrieren ist. Man hat also tatsächlich nicht die Funktion $f(x, \tilde{y}(x))$ integriert, die man sich etwa mittels Interpolation der $\tilde{y}(x_i)$ entstanden denken könnte; es wurden vielmehr Näherungspolynome $\tilde{f}(x, \tilde{y}(x))$ benutzt. Demnach genügt das berechnete $\tilde{y}$ der Differentialgleichung

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

mit der Anfangsbedingung $\tilde{y}(x_0) = y_0$.

Um die allgemeine Abschätzungsformel (7) anwenden zu können, schreiben wir

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = f(x, \tilde{y}(x)) + \vartheta(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41).$$

Dabei ist nach (40)

$$\vartheta(x) = \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) - f(x, \tilde{y}(x)) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (42).$$

Folglich ist ϑ nichts anderes als der Interpolationsfehler, der bei dem stückweisen Ersatz einer Funktion $f(x, \tilde{y}(x)) = F(x)$ durch Interpolationspolynome 3. Grades $\tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) = \tilde{F}(x)$ entsteht. Der Interpolationsfehler läßt sich leicht abschätzen. Es ist nämlich

$$F(x) - \tilde{F}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})(x - x_{i+3})}{4!}\left(\frac{d^4 F}{d x^4}\right)_{x=\xi} \quad \ldots \quad (43),$$

wo ξ ein Zwischenwert zwischen x und den vier zur Interpolation benutzten Argumenten x_i, x_{i+1}, x_{i+2} und x_{i+3} ist. Wir setzen $x = x_i + u\,h$, wobei u bei den Ausgangswerten, wo $i = 0$ ist, zwischen 0 und 3 benutzt wird, während es später, wo $i = n - 2$, $n \geqq 3$ ist, nur zwischen 2 und 3 gebraucht wird. Jedenfalls hat das Polynom in (43):

$$(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})(x - x_{i+3}) = h^4 u (u - 1)(u - 2)(u - 3) \quad \ldots \quad (44)$$

als leicht zu berechnende absolute Schranke den Wert h^4, wenn $0 \leqq u \leqq 3$ ist, womit der ganze Anwendungsbereich gedeckt ist. Für die totale 4. Ableitung nach x in (43) gelte:

$$\left|\frac{d^4 F(x)}{d x^4}\right| = \left|\frac{d^4 f(x, \tilde{y}(x))}{d x^4}\right| \leqq K_4 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45).$$

Dann ist

$$|\vartheta| = |\tilde{F}(x) - F(x)| \leqq \frac{h^4 K_4}{24} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (46).$$

Es ergibt sich demnach nach der Formel (7) für den Fehler bei dem von uns auseinandergesetzten Integrationsverfahren:

$$|\tilde{y} - y| \leqq \frac{h^4 K_4}{24\,M}\left(e^{M|x - x_0|} - 1\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47).$$

Damit ist die gesuchte Fehlerabschätzung geleistet. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Rechnung mit so vielen Stellen durchgeführt wird, daß Abrundungsfehler gegenüber den erörterten Fehlern nicht ins Gewicht fallen.

Von den Größen, die in der Fehlerformel (47) auftreten, bedarf allenfalls K_4 noch einer Erörterung, während über die Bestimmung der Lipschitzkonstanten M schon früher das Nötige gesagt worden ist. Um K_4 zu ermitteln, muß die 4. totale Ableitung von $f(x, \tilde{y}(x)) = F(x)$ betrachtet werden. Zur Verdeutlichung schreiben wir die 1. totale Ableitung dieser Funktion hin:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}}\tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48).$$

Nun ist allerdings $\tilde{y}$ erst für die ausgezeichneten Argumente $x_i = x_0 + i\,h$ bekannt. Zwischenwerte von $\tilde{y}$ sind, streng genommen, gemäß (40) zu bestimmen, also durch Integration der mit $\tilde{y}_i$ bekannten Interpolationspolynome $\tilde{F}(x)$. Zur rohen Abschätzung von ϑ dürfte meist eine direkte Interpolation der $\tilde{y}$ genügen. Wenn die 4. Ableitung von F nicht mehr stetig ist, so hat man natürlich $\frac{K_4}{24}$ als absolute Schranke der 4. dividierten Differenz zu definieren.

Die Übertragung dieser Fehlerabschätzung auf andere Integrationsverfahren, die mit iterativer Verbesserung mittels angenäherter Quadratur arbeiten, ist leicht. Offensichtlich ist es für die Fehlerabschätzung unwesentlich, ob man die ersten Näherungen, wie oben, nach dem ursprünglichen Adamsschen Verfahren gewinnt oder irgendwie anders.

§ 5. Fehlerabschätzung in Abschnitten. Anwendung auf das ursprüngliche Adamssche Verfahren. Oft ist es zweckmäßig, die Fehlerabschätzung nicht auf einmal für den gesamten Näherungsbereich vorzunehmen, sondern in einzelnen Abschnitten. Häufig wird man nämlich den Argumentschritt h im Verlauf der Rechnung ändern, man vergleiche etwa dazu die verschiedenen Schranken für h beim Anfang und im weiteren Verlauf des Verfahrens, wie sie in § 3 (37) (28) gegeben wurden. Außerdem wird man auch deshalb, weil man nicht überflüssig große Werte von M bzw. K_4 für den ganzen Bereich ansetzen möchte, den Bereich für die Fehlerabschätzung gegebenenfalls unterteilen.

Diese Fehlerabschätzung in Abschnitten läßt sich nun sofort mit Hilfe der allgemeinen Abschätzungsformel § 2 (11) erledigen. δ ist die Fehlerschranke aus dem vorhergehenden Abschnitt der Fehlerschätzung, während ε wieder durch den in § 4 erörterten Interpolationsfehler in dem betreffenden Abschnitt gegeben ist.

Als Anwendung führen wir die Fehlerabschätzung bei dem ursprünglichen Adamsschen Verfahren durch. Dies Verfahren wird, wie wir schon in § 2 (16) bemerkten, durch die Rekursionsformel

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h \left\{ F_n + \frac{1}{2} \nabla_n F + \frac{5}{12} \nabla_n^2 F + \frac{3}{8} \nabla_n^3 F \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

beschrieben, wobei $n \geqq 3$ ist. Die Ausgangswerte $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, $\tilde{y}_3$ mögen irgendwie beschafft sein und die absolute Fehlerschranke δ haben. Wie früher (vgl. § 4) ist von $x = x_3$ ab:

$$\frac{d y}{d x} = f(x, \tilde{y}(x)) + \vartheta(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

mit

$$\vartheta(x) = \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) - f(x, \tilde{y}(x)) = \tilde{F}(x) - F(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51),$$

wo $\tilde{F}$ stückweise durch Approximationspolynome 3. Grades von $F(x)$ dargestellt ist. $\tilde{F}(x)$ ist jetzt aber zur Extrapolation benutzt. Der Extrapolationsfehler ist

$$F(x) - \tilde{F}(x) = \frac{(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)}{4!} \left(\frac{d^4 F}{d x^4} \right)_{x = \xi} \quad . \; . \; . \; . \quad (52),$$

wo ξ ein Zwischenwert zwischen x $(x_n \leqq x \leqq x_{n+1})$ und den vier zur Approximation benutzten Argumenten x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3} ist. Wir setzen $x = x_n + u\,h$, wobei u zwischen 0 und 1 veränderlich ist. Das Polynom in (52):

$$(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n) = h^4 (u + 3)(u + 2)(u + 1)\,u \quad . \; . \; . \quad (53)$$

hat für $0 \leqq u \leqq 1$ die absolute Schranke $24\,h^4$. Deshalb ist

$$|\vartheta| = |\tilde{F}(x) - F(x)| \leqq h^4 K_4 = \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54),$$

wenn wiederum

$$\left| \frac{d^4 F(x)}{d x^4} \right| = \left| \frac{d^4 f(x, \tilde{y}(x))}{d x^4} \right| \leqq K_4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

ist. Also ergibt sich nach (11) als Fehlerschranke beim ursprünglichen Adamsschen Verfahren, das von x_3 ab einsetzt:

$$|\tilde{y} - y| \leqq \frac{\delta}{M} e^{M|x - x_3|} + \frac{h^4 K_4}{M} \left(e^{M|x - x_3|} - 1 \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56).$$

K_4 ist unter Benutzung des gesamten Integrationsbereiches $x_0 \ldots x$ zu bestimmen, während für M nur der Bereich $x_3 \ldots x$ zu berücksichtigen ist.

Die am Schluß des § 1 angedeutete Verfeinerung (6a) der Abschätzung ließe sich in diesem Falle besonders einfach durchführen. Als Ergebnis erhielte man die verbesserte Fehlerschranke:

$$|\tilde{y} - y| \leqq \frac{\delta}{M} e^{M|x - x_3|} + \frac{251}{720} \frac{h^4 K_4}{M} \left(e^{M|x - x_3|} - 1 \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56a).$$

KLEINE MITTEILUNGEN

Ableitung der Verzerrungskomponenten und der Gleichgewichtsbedingungen für Zylinder- und Polar-Koordinaten. Sind $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ drei Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Parallelkoordinatensystems, und ist $\mathfrak{V} = u\,\mathfrak{E}_1 + v\,\mathfrak{E}_2 + w\,\mathfrak{E}_3$ der Vektor der elastischen Verschiebung, so erhalten wir durch Differentiation nach x, y und z

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathfrak{E}_1 + \frac{\partial v}{\partial x}\mathfrak{E}_2 + \frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{E}_3,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\mathfrak{E}_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\mathfrak{E}_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\mathfrak{E}_3,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{E}_1 + \frac{\partial v}{\partial z}\mathfrak{E}_2 + \frac{\partial w}{\partial z}\mathfrak{E}_3.$$

Die neun Koeffizienten der rechten Seite geben uns die Verzerrungsgrößen: In der Hauptdiagonalen stehen die Dehnungen, die Summe der zur Hauptdiagonalen symmetrischen Größen sind die Winkeländerungen.

Um die Verzerrungsgrößen für krummlinige Koordinaten zu bekommen, drücken wir diesen Sachverhalt folgendermaßen aus: Es seien an jedem Punkte drei zueinander senkrechte Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ gegeben, und der Verschiebungsvektor sei

$$\mathfrak{V} = u\,\mathfrak{t}_1 + v\,\mathfrak{t}_2 + w\,\mathfrak{t}_3;$$

u, v, w sind also jetzt die Komponenten der Verschiebung in Richtung von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$. Differenzieren wir jetzt $\mathfrak{V}$ nach den Längenelementen $d\,s_1$, $d\,s_2$, $d\,s_3$ in den drei Richtungen von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, wobei zu beachten ist, daß $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$, jetzt mit zu differenzieren sind, so erhalten wir in den neun Koeffizienten von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ auf der rechten Seite genau wie oben die Verzerrungsgrößen; in der Hauptdiagonalen stehen die Dehnungen; die drei Winkeländerungen erhalten wir durch paarweise Addition der zur Hauptdiagonalen symmetrisch stehenden Größen.

Zylinderkoordinaten. Haben wir Zylinderkoordinaten r, ϑ, z, so legen wir an jedem Punkte die drei Vektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ in die Richtungen, in denen r, ϑ und z wachsen, d. h. radial, tangential und axial. Die Differentialquotienten von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ sind dann null bis auf

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial \vartheta} = \mathfrak{t}_2, \qquad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial \vartheta} = -\mathfrak{t}_1.$$

Differenzieren wir den Verschiebungsvektor

$$\mathfrak{V} = u\,\mathfrak{t}_1 + v\,\mathfrak{t}_2 + w\,\mathfrak{t}_3$$

nach den drei Längenelementen

$$d\,s_1 = d\,r, \qquad d\,s_2 = r\,d\,\vartheta, \qquad d\,s_3 = d\,z,$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial r}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial r}\mathfrak{t}_3,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \vartheta} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r}\right)\mathfrak{t}_1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r}\right)\mathfrak{t}_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\mathfrak{t}_3,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial z}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial z}\mathfrak{t}_3.$$

Rechts stehen als Koeffizienten von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ in der Hauptdiagonalen die Dehnungen

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Addition der dazu symmetrisch stehenden Größen gibt die Winkeländerungen

$$\gamma_{r\vartheta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v}{r}, \qquad \gamma_{\vartheta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\gamma_{z r} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Polarkoordinaten. Es sei r der Radius, λ die geographische Länge, φ die geographische Breite. Wir legen die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ in die Richtungen, in denen r, λ und φ wachsen und drücken sie durch die festen Einheitsvektoren $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems aus

$$\mathfrak{t}_1 = \cos\lambda\cos\varphi\,\mathfrak{E}_1 + \sin\lambda\cos\varphi\,\mathfrak{E}_2 + \sin\varphi\,\mathfrak{E}_3,$$

$$\mathfrak{t}_2 = -\sin\lambda\,\mathfrak{E}_1 + \cos\lambda\,\mathfrak{E}_2,$$

$$\mathfrak{t}_3 = -\cos\lambda\sin\varphi\,\mathfrak{E}_1 - \sin\lambda\sin\varphi\,\mathfrak{E}_2 + \cos\varphi\,\mathfrak{E}_3.$$

Dann erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial \lambda} = \cos\varphi\,\mathfrak{t}_2, \qquad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial \lambda} = -\cos\varphi\,\mathfrak{t}_1 + \sin\varphi\,\mathfrak{t}_3,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_1}{\partial \varphi} = \mathfrak{t}_3, \qquad \frac{\partial \mathfrak{t}_2}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial \lambda} = -\sin\varphi\,\mathfrak{t}_2,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{t}_3}{\partial \varphi} = -\mathfrak{t}_1.$$

Die Differentiation des Verschiebungsvektors

$$\mathfrak{V} = u\,\mathfrak{t}_1 + v\,\mathfrak{t}_2 + w\,\mathfrak{t}_3$$

nach den Längenelementen

$$d\,s_1 = d\,r, \qquad d\,s_2 = r\cos\varphi\,d\,\lambda, \qquad d\,s_3 = r\,d\,\varphi$$

in Richtung von $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ ergibt dann

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial r}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial r}\mathfrak{t}_3,$$

$$\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \lambda} = \frac{1}{r\cos\varphi}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} - v\cos\varphi\right)\mathfrak{t}_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} + u\cos\varphi - w\sin\varphi\right)\mathfrak{t}_2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \lambda} + v\sin\varphi\right)\mathfrak{t}_3\right\},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \varphi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{r}\right)\mathfrak{t}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\mathfrak{t}_2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}\right)\mathfrak{t}_3.$$

Daraus ergeben sich ohne weiteres die Dehnungen

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\lambda = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{u}{r} - \frac{w}{r}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{u}{r}$$

und die Winkeländerungen

$$\gamma_{r\lambda} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{v}{r},$$

$$\gamma_{\lambda\varphi} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + \frac{v\operatorname{tg}\varphi}{r}$$

$$\gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}.$$

Die Differentiationsformeln der Vektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ liefern auch die Bedingungen für die am Volumelement angreifenden Spannungen und äußeren Kräfte, welche letzteren wir pro Volumeinheit mit

$$\mathfrak{P} = P_r\,\mathfrak{t}_1 + P_\vartheta\,\mathfrak{t}_2 + P_z\,\mathfrak{t}_3$$

bezeichnen wollen.

Zylinderkoordinaten. Wir betrachten ein Volumelement, das von sechs Flächen $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $z = \text{const}$ und $r + dr = \text{const}$, $\vartheta + d\vartheta = \text{const}$, $z + dz = \text{const}$ begrenzt wird. Fassen wir die Spannungen zu den Spannungsvektoren

$\mathfrak{f}_1 = \sigma_r\,\mathfrak{t}_1 + \tau_{r\vartheta}\,\mathfrak{t}_2 + \tau_{rz}\,\mathfrak{t}_3$ für die Flächen $r = \text{const}$,

$\mathfrak{f}_2 = \tau_{\vartheta r}\,\mathfrak{t}_1 + \sigma_\vartheta\,\mathfrak{t}_2 + \tau_{\vartheta z}\,\mathfrak{t}_3$ für die Flächen $\vartheta = \text{const}$,

$\mathfrak{f}_3 = \tau_{zr}\,\mathfrak{t}_1 + \tau_{z\vartheta}\,\mathfrak{t}_2 + \sigma_z\,\mathfrak{t}_3$ für die Flächen $z = \text{const}$

zusammen, so wirken auf die Begrenzungsflächen des Volumelementes die Kräfte

$$-\mathfrak{f}_1\, r\, d\vartheta\, dz \quad \text{bzw.} \quad \left(r\,\mathfrak{f}_1 + \frac{\partial\, r\,\mathfrak{f}_1}{\partial r}\, dr\right) d\vartheta\, dz,$$

$$-\mathfrak{f}_2\, dr\, dz \quad \text{bzw.} \quad \left(\mathfrak{f}_2 + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_2}{\partial\vartheta}\, d\vartheta\right) dr\, dz,$$

$$-\mathfrak{f}_3\, r\, d\vartheta\, dr \quad \text{bzw.} \quad \left(\mathfrak{f}_3 + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_3}{\partial z}\, dz\right) r\, dr\, d\vartheta.$$

Außerdem wirkt die Volumkraft

$$\mathfrak{P} = P_r\,\mathfrak{t}_1 + P_\vartheta\,\mathfrak{t}_2 + P_z\,\mathfrak{t}_3.$$

Im Gleichgewichtsfalle verschwindet die Summe dieser Kräfte. Das ergibt nach Kürzung durch das Volumelement $dr \cdot r\,d\vartheta \cdot dz$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\, r\,\mathfrak{f}_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,\mathfrak{f}_2}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_3}{\partial z} + \mathfrak{P} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}\mathfrak{t}_3 + \frac{1}{r}(\sigma_r\,\mathfrak{t}_1 + \tau_{r\vartheta}\,\mathfrak{t}_2 + \tau_{rz}\,\mathfrak{t}_3)$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\vartheta r}}{\partial\vartheta}\mathfrak{t}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta}\mathfrak{t}_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\vartheta z}}{\partial\vartheta}\mathfrak{t}_3 + (\tau_{r\vartheta}\,\mathfrak{t}_2 - \sigma_\vartheta\,\mathfrak{t}_1)\frac{1}{r}$$

$$+ \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial\tau_{z\vartheta}}{\partial z}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\mathfrak{t}_3 + P_r\,\mathfrak{t}_1 + P_\vartheta\,\mathfrak{t}_2 + P_z\,\mathfrak{t}_3 = 0,$$

oder, in Komponenten zerlegt,

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\vartheta r}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + P_r = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\tau_{z\vartheta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\vartheta r}}{r} + P_\vartheta = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\vartheta z}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + P_z = 0.$$

Polarkoordinaten. Sind r, λ, φ Radius, Länge und Breite in räumlichen Polarkoordinaten, so hat das Volumelement die Kanten dr, $r\cos\varphi\, d\lambda$, $r\,d\varphi$. Es wirken dann (Bezeichnungen analog wie oben) auf die Flächen desselben die Kräfte

$$-\mathfrak{f}_1\, r^2\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$$

$$\text{bzw.} \quad \left(\mathfrak{f}_1 r^2 + \frac{\partial(\mathfrak{f}_1 r^2)}{\partial r}\, dr\right)\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi,$$

$$-\mathfrak{f}_2\, r\, d\varphi\, dr \quad \text{bzw.} \quad \left(\mathfrak{f}_2 + \frac{\partial\,\mathfrak{f}_2}{\partial\lambda}\, d\lambda\right) r\, d\varphi\, dr,$$

$$-\mathfrak{f}_3\, r\cos\varphi\, dr\, d\lambda$$

$$\text{bzw.} \quad \left(\mathfrak{f}_3\cos\varphi + \frac{\partial(\mathfrak{f}_3\cos\varphi)}{\partial\varphi}\, d\varphi\right) r\, dr\, d\lambda.$$

Außerdem wirke die Volumkraft

$$\mathfrak{P} = P_r\,\mathfrak{t}_1 + P_\lambda\,\mathfrak{t}_2 + P_\varphi\,\mathfrak{t}_3.$$

Die Gleichgewichtsbedingung, daß die Summe aller Kräfte verschwindet, liefert nach Kürzung durch das Volumelement die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\mathfrak{f}_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\,\mathfrak{f}_2}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(\mathfrak{f}_3\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \mathfrak{P} = 0.$$

Setzt man $\mathfrak{f}_1 = \sigma_r\,\mathfrak{t}_1 + \tau_{r\lambda}\,\mathfrak{t}_2 + \tau_{r\varphi}\,\mathfrak{t}_3$ usw. ein und führt die Differentiationen aus, indem man die oben abgeleiteten Formeln für die Differentialquotienten von $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ benutzt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\tau_{r\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi}\right)\mathfrak{t}_1$$

$$+ \frac{2}{r}(\sigma_r\,\mathfrak{t}_1 + \tau_{r\lambda}\,\mathfrak{t}_2 + \tau_{r\varphi}\,\mathfrak{t}_3),$$

$$\left(\frac{\partial\tau_{\lambda r}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\lambda\varphi}}{\partial\varphi}\right)\mathfrak{t}_2$$

$$+ \frac{1}{r\cos\varphi}\{\tau_{\lambda r}\cos\varphi\,\mathfrak{t}_2$$

$$+ \sigma_\lambda(-\cos\varphi\,\mathfrak{t}_1 + \sin\varphi\,\mathfrak{t}_3) - \tau_{\lambda\varphi}\sin\varphi\,\mathfrak{t}_2\},$$

$$\left(\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\tau_{\varphi\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}\right)\mathfrak{t}_3$$

$$- \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r}(\tau_{\varphi r}\,\mathfrak{t}_1 + \tau_{\varphi\lambda}\,\mathfrak{t}_2 + \sigma_\varphi\,\mathfrak{t}_3)$$

$$+ \frac{\tau_{\varphi r}}{r}\mathfrak{t}_3 - \frac{\sigma_\varphi}{r}\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{P} = 0,$$

oder nach Zerlegung in die Komponentengleichungen

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\tau_{r\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\lambda - \sigma_\varphi}{r}$$

$$- \frac{\tau_{\varphi r}\operatorname{tg}\varphi}{r} + P_r = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{\lambda r}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\lambda\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{3\tau_{\lambda r}}{r}$$

$$- \frac{2\tau_{\lambda\varphi}\operatorname{tg}\varphi}{r} + P_\lambda = 0.$$

$$\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\tau_{\varphi\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{(\sigma_\lambda - \sigma_\varphi)\operatorname{tg}\varphi}{r}$$

$$+ \frac{3\tau_{\varphi r}}{r} + P_\varphi = 0.$$

E. Trefftz †. 756

Über die Anzahl der Eigenwerte, die man bei Anwendung des Ritzschen Verfahrens auf die Scherknickung quadratischer Platten erhält. Bei der gemeinsam mit Trefftz durchgeführten Berechnung der Eigenwerte einer auf Scherknickung beanspruchten quadratischen Platte[1]) stellte sich heraus, daß das Ritzsche Verfahren die gleiche Anzahl, nämlich 16, von Näherungswerten lieferte, ganz gleichgültig, ob die Indizes der im Ansatz auftretenden Koeffizienten bis vier oder bis fünf liefen. Dieser Umstand gab den Anlaß zu nachfolgender Untersuchung, die den Satz ergibt:

Läßt man bei der Berechnung der Eigenwerte der Scherknickung einer quadratischen Platte mittels des Ritzschen Verfahrens die Indizes der Koeffizienten des Ansatzes von 1 bis $2n$ oder bis $2n+1$ laufen, so ergeben sich in beiden Fällen Näherungen für $2n^2$ positive und $2n^2$ negative Eigenwerte, die dem absoluten Betrage nach paarweise gleich sind.

Die Näherungswerte ergeben sich durch Nullsetzen der Determinante des Gleichungssystems (15) jener Arbeit

$$c_{hk} = -\frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(h^2+k^2)^2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{h\,k\,\mu\,\nu}{(\mu^2-h^2)(\nu^2-k^2)}c_{\mu\nu},$$

$$\left(\begin{matrix}\mu-h\\ \nu-k\end{matrix}\ \text{ungerade}\right).$$

Diese Determinante spaltet sich, wie dort gezeigt wurde, in zwei Teildeterminanten auf, deren eine nur die Faktoren von c enthält, deren Indexsumme gerade, während die andere nur Faktoren solcher c enthält, für die diese Summe ungerade ist. Denkt man sich die in jener Arbeit auf Seite 343 hingeschriebene Determinante verallgemeinert, so stellt man leicht durch Abzählen der letzten Reihen, die mit einem x-Glied in der ersten Spalte beginnen und für die h sowohl wie k einen geraden Wert haben, fest, daß diese Determinante sowohl im Falle $2n$ wie $2n+1$ eine Gleichung in x^2 höchstens vom Grade n^2 liefert; denn wenn man die für beide Indizes in Frage kommenden geraden Zahlen zu zweien ordnet, erhält man n^2 Zuordnungen. Diese Determinante kann also höchstens Näherungen für n^2 positive und ebensoviel negative Eigenwerte liefern. Durch eine entsprechende Abzählung der letzten mit x beginnenden Reihen der zweiten Determinante (Seite 344), in der die h gerade und die k ungerade sind, findet man, daß diese im Fall $2n$ ebenfalls höchstens Näherungen für n^2 Eigenwerte gibt. Im Falle $2n+1$ könnte sich eine Gleichung vom Grade $n(n+1)$ ergeben (Zahl der Zuordnung von $n+1$ ungeraden zu n geraden Zahlen). Es läßt sich aber zeigen, daß man in diesem Falle ebenfalls höchstens eine solche vom Grade n^2 erhalten kann.

Ist g eine gerade Zahl, so lassen sich jedesmal die $n+1$ Reihen mit gleichem $h=g$ so ordnen, daß, wenn man sie der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \lambda$ und 1 multipliziert und die in jeder Spalte stehenden Glieder addiert, man bis auf einen konstanten Faktor

$$\frac{\mu}{\mu^2-g^2}\left[\alpha\frac{\nu}{\nu^2-1^2}+3\beta\frac{\nu}{\nu^2-3^2}+5\gamma\frac{\nu}{\nu^2-5^2}\cdots\right.$$
$$+(2n-1)\lambda\frac{\nu}{\nu^2-(2n-1)^2}$$
$$\left.+(2n+1)\frac{\nu}{\nu^2-(2n+1)^2}\right]$$

erhält, wo in den ersten $n+1$ Spalten ν den Wert 2, in den nächsten den Wert 4 usw., in den letzten $n+1$ den Wert $2n$ hat, während jedesmal μ der Reihe nach die Werte $1, 3, 5 \ldots 2n+1$ annimmt. Man erhält also für die Klammer n verschiedene Werte. Setzt man diese gleich Null, erhält man n Gleichungen, aus denen sich die $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ berechnen lassen. Die Koeffizientendeterminante dieser Gleichungen ist

$$\Delta = (2n)!\begin{vmatrix}\frac{1}{2^2-1^2} & \frac{1}{2^2-3^2} & \cdots\cdots & \frac{1}{2^2-(2n-1)^2}\\ \frac{1}{4^2-1^2} & \frac{1}{4^2-3^2} & \cdots\cdots & \frac{1}{4^2-(2n-1)^2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{(2n)^2-1^2} & \frac{1}{(2n)^2-3^2} & \cdots & \frac{1}{(2n)^2-(2n-1)^2}\end{vmatrix}$$

Durch Umformung ergibt sich hieraus

$$\Delta = (2n)!\frac{\Pi(u^2-v^2)(g^2-h^2)}{\Pi(k^2-w^2)},$$

wo für u, v, w die Werte aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ und für g, h, k die aller geraden Zahlen von 2 bis $2n$ einzusetzen sind. Dabei muß $u > v$ und $g < h$ sein, während für k und w keine weiteren Beschränkungen gelten. Die Determinante ist also von Null verschieden. Damit ist gezeigt, daß, wenn man zu jeder $(n+1)$-ten Reihe einer Gruppe die der Reihe nach mit den berechneten Konstanten multiplizierten anderen n Reihen addiert, sämtliche das x enthaltenden Glieder dieser Reihen Null werden. Das gleiche gilt auch für die Spalten. Man kann also aus n Reihen und n Spalten, in denen die Unbekannte vorkommt, diese eliminieren. Genau so, wie in der links unten stehenden Teildeterminante kann man in der rechts obenstehenden mit den das x enthaltenden Gliedern verfahren. Die durch diese Umformung sich ergebende Teildeterminanten stimmen mit denen, die man erhält, wenn man die Indizes nur bis $2n$ laufen läßt, überein. Die zweite Determinante liefert also auch nur höchstens Näherungen für n^2 positive und n^2 negative Eigenwerte. Damit ist gezeigt, daß sich sowohl in dem Fall, wo die Indizes bis $2n$, wie in dem, wo sie bis $2n+1$ laufen, höchstens Näherungen für $2n^2$ positive und $2n^2$ negative Eigenwerte ergeben.

Es läßt sich nun aber weiter zeigen, daß diese Zahl in beiden Fällen auch wirklich erreicht wird. Eine weitere Reduktion der die x-Glieder enthaltenden Teildeterminante ist nämlich nicht mehr möglich, da die von den Faktoren der x gebildeten Determinanten von Null verschieden sind. Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{u}{u^2-g^2}$ mit $[u, g]$ $\frac{h}{h^2-v^2}$ mit (h, v), so lautet z. B. in der zweiten Determinante der Gleichungen, deren Koeffizienten eine ungerade Indexsumme haben, die Determinante der Koeffizienten der x-Glieder

[1]) Trefftz-Willers: ZAMM 16 (1936), 336 bis 344.

$$\begin{vmatrix} [1,2](2,1) & [1,2](2,3) \ldots\ldots [1,2](2,2n-1) & [1,4](2,1) \ldots\ldots [1,2n](2,2n-1) \\ [1,2](4,1) & [1,2](4,3) \ldots\ldots [1,2](4,2n-1) & [1,4](4,1) \ldots\ldots [1,2n](4,2n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [1,2](2n,1) & [1,2](2n,3) \ldots\ldots [1,2](2n,2n-1) & [1,4](2n,1) \ldots\ldots [1,2n](2n,2n-1) \\ [3,2](2,1) & [3,2](2,3) \ldots\ldots [3,2](2,2n-1) & [3,4](2,1) \ldots\ldots [3,2n](2,2n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [3,2](2n,1) & [3,2](2n,3) \ldots\ldots [3,2](2n,2n-1) & [3,4](2n,1) \ldots\ldots [3,2n](2n,2n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [2n-1,2](2,1) & [2n-1,2](2,3) \ldots [2n-1,2](2,2n-1) & [2n-1,4](2,1) \ldots [2n-1,2n](2,2n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [2n-1,2](2n,1) & [2n-1,2](2n\,3) \ldots [2n-1,2](2n,2n-1) & [2n-1,4](2n,1) \ldots [2n-1,2n](2n,2n-1) \end{vmatrix} .$$

Aus dieser ergibt sich durch Umformung

$$\begin{vmatrix} [1,2] & [1,4] & \ldots\ldots & [1,2n] \\ [3,2] & [3,4] & \ldots\ldots & [3,2n] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [2n-1,2] & [2n-1,4] & \ldots & [2n-1,2n] \end{vmatrix}^n \cdot \begin{vmatrix} (2,1) & (2,3) & \ldots\ldots & (2,2n-1) \\ (4,1) & (4,3) & \ldots\ldots & (4,2n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n,1) & (2n,3) & & (2n,2n-1) \end{vmatrix}^n$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} (2,1) & (2,3) & \ldots\ldots & (2,2n-1) \\ (4,1) & (4,3) & \ldots\ldots & (4,2n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (2n,1) & (2n,3) & \ldots\ldots & (2n,2n-1) \end{vmatrix}^{2n} .$$

Das ist aber bis auf von Null verschiedene Faktoren die Determinante Δ, von der oben gezeigt wurde, daß sie von Null verschieden ist. Eine gleichgeformte Determinante ergibt sich auch im ersten Fall, wo die Indexsumme der Koeffizienten gerade ist. Damit ist also nachgewiesen, daß der Grad der sich aus der Determinante ergebenden Gleichungen für x^2 in beiden Fällen tatsächlich n^2 ist. Man erhält also in beiden Fällen, ob nun die Indizes bis $2n$ oder bis $2n+1$ laufen, immer für $2n^2$ positive und für ebensoviel negative Eigenwerte Näherungen, die dem absoluten Betrage nach paarweise gleich sind. Die Genauigkeit der Näherungen ist natürlich im zweiten Fall größer als im ersten, so daß es durchaus Zweck hatte, in jener Arbeit nicht bis zum Index 4, sondern bis 5 zu gehen.

Dresden. Fr. A. Willers. 757

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

A. Bezugsbedingungen:

Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt $^1/_2$jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **13.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

VDI-Literaturkartei: Auf Wunsch erhalten unsere Bezieher unberechnet Karteikarten über den Inhalt sämtlicher Zeitschriften des VDI in monatlichen Zusammenstellungen gegen Erstattung der jährlichen Versandkosten von 1.— RM.

ZUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise

Satzspiegel der $^1/_1$ Seite 171/250 mm.
$^1/_1$ Seite 160.— RM, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3 maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6 maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102373, Wien 174439, Prag 77329, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin SW 19, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8 bis 17 Uhr, Sonnabend 8 bis 12$^1/_2$ Uhr.